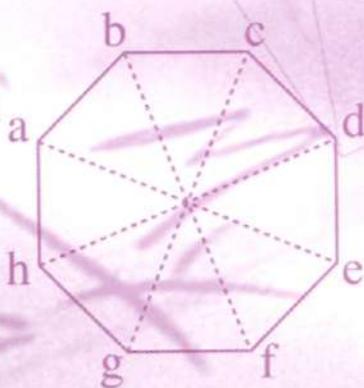
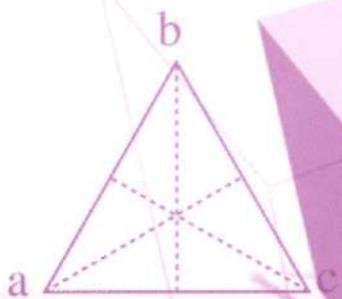


Matemática II - EGB₃



Proyecto pedagógico con modalidad a distancia para la terminalidad de estudios de EGB₃ y Educación Polimodal EDITEP



Matemática II - EGB3

Proyecto pedagógico con modalidad a distancia para la terminalidad
de estudios de EGB3 y Educación Polimodal EDITEP

Universidad Nacional de Cuyo (Mendoza, República Argentina)

Rectora: Dra. María Victoria Gómez de Erice

Vicerrector: Ing. Agr. Arturo Somoza

Secretaria de Extensión Universitaria: Mgter. Rosa Fader de Guiñazú

Directora General del CICUNC: Lic. Martina Funes

Directora de Educación a Distancia: Mgter. Fernanda Ozollo

Director de Nuevas Tecnologías: Mgter. Ornar Arancibia

Gobierno de Mendoza

Gobernador: Ing. Julio Cobos

Ministro de Justicia y Seguridad Social: Dr. Osvaldo Tello

Directora General de Escuelas: Lic. Emma Cunietti

Subsecretario de Relaciones con la Comunidad, -MJyS-: Lic. Gabriel Conte

Subsecretario de Administración y Gestión Educativa, -DGE-: Lic. Flavio Arjona

Proyecto EDITEP

Responsables del Proyecto

Responsable Institucional: Mgter. Rosa Fader de Guiñazú

Directora de Proyecto: Mgter. Fernanda Ozollo

Coordinadora General del Proyecto: Lic. Mónica Matilla

Coordinador Tecnológico: Mgter. Omar Arancibia

Comité Estratégico del Proyecto

Gobierno de Mendoza -Ministerio de Seguridad y Justicia-: Lic. Luis Romero

Gobierno de Mendoza -Dirección General de Escuelas-: Prof. Eduardo Andrade

Universidad Nacional de Cuyo: Lic. Mónica Matilla, Mgter. Fernanda Ozollo

EDIUNC

Editorial de la Universidad Nacional de Cuyo

Director: Prof. René Gotthelf





Universidad Nacional de Cuyo
Secretaría de Extensión Universitaria

Matemática II - ECB3

**Proyecto pedagógico con modalidad a distancia para la terminalidad
de estudios de EGB3 y Educación Polimodal EDITEP**

Cristina Adunka, Gabriela Mattiello,
Adriana Moreno, Ana Repetto

EDIUNC
Mendoza, 2005

Matemática II - EGB3

Coordinación de la elaboración del libro

Marcela Orlando

Asesora experta

Norma Pacheco

Producción de textos y procesamiento didáctico

Cristina Adunka, Gabriela Mattiello,

Adriano Moreno, Ana Repetto

Procesamiento didáctico final

Diego Díaz Puppato

Corrección de estilo

Luis Emilio Abraham, Gonzalo Casas, Pilar Piñeyrúa

Diseño de cubierta e interior

Coordinador

Claudio E. Cicchinelli

Diseñadores

Carolina Chiconi, Fabricio de la Vega, Natalia Lobarbo,

Julieta Martín, Lorena Pelegrina

Ilustradores

Matías Arges, J. Mariano Ruszaj

Primera edición. Mendoza, 2005

Publicación de la Secretaría de Extensión Universitaria de la Universidad Nacional de Cuyo
Serie Trayectos Cognitivos, N° 29

Matemática II : EGB 3 : proyecto pedagógico con
modalidad a distancia para terminalidad de estudios de EGB 3
y Educación Polimodal EDITEP / Cristina Adunka ... [et al.] -- 1ª. ed. -
Mendoza: EDIUNC, 2005.

302.; 29,7 cm. - (Trayectos cognitivos; 29)

ISBN 950-39-0195-2

1- Matemática 2- Geometría

I- Adunka, Cristina II- Mattiello, Gabriela III- Moreno, Adriana IV- Repetto, Ana



Impreso en Argentina - Printed in Argentina

ISBN 950-39-0195-2

Queda hecho el depósito que marca la ley 11.723

EDIUNC, 2005

Centro Universitario, 5500 Mendoza

República Argentina

INTRODUCCIÓN.	11
EJE N° 1: CONJUNTOS NUMÉRICOS.....	17
EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES.....	19
EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS.....	21
EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES.....	23
Distintas escrituras de un número racional (fraccionaria, decimal). Expresiones decimales finitas y periódicas.	25
ALGUNOS NÚMEROS IRRACIONALES.....	27
EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES.....	29
La recta real.....	31
Valor absoluto de un número real.....	34
Números opuestos.....	35
Orden.....	36
Intervalos de números reales.....	41
Tipos de intervalos.....	42
MÚLTIPLOS Y DIVISORES DE UN NÚMERO NATURAL.....	45
NÚMEROS NATURALES PRIMOS Y NÚMEROS NATURALES COMPUESTOS.....	50
CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD.....	51
TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA.....	52
DIVISOR COMÚN MAYOR (D.C.M.) DE DOS O MÁS NÚMEROS NATURALES.....	55
MÚLTIPLO COMÚN MENOR (M.C.M.).....	58
CÁLCULOS CON NÚMEROS RACIONALES BAJO DISTINTAS NOTACIONES (FRACCIONARIA Y DECIMAL). PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES.....	60
Suma de números racionales.....	61
Propiedades de la adición en el conjunto de los números racionales.....	70
Resta de números racionales.....	75
Supresión de paréntesis (), corchetes [] y llaves {}.....	77
Multiplicación de números racionales.....	82
Propiedades de la multiplicación en \mathbb{Q}	89

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y la resta	93
Cocientes de números racionales	96
Cocientes entre números racionales expresados en forma decimal	98
Propiedades de la división	100
CÁLCULOS CON SUMAS, RESTAS, PRODUCTOS Y COCIENTES DE NÚMEROS RACIONALES	102
POTENCIACIÓN	103
Los signos de la potenciación	105
Análisis de casos especiales de potencias con base racional	108
Propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la multiplicación y a la división de números racionales	111
RAÍZ DE UN NÚMERO RACIONAL	116
CÁLCULOS CON SUMAS, RESTAS, PRODUCTOS, COCIENTES, POTENCIAS Y RAÍCES DE NÚMEROS RACIONALES	123
EXPRESIONES ALGEBRAICAS	125
Valor numérico de una expresión algebraica	130
Operaciones sencillas con expresiones algebraicas	131
FACTOR COMÚN	135
ECUACIONES	145
Las partes que tiene una ecuación	146
LAS PROPIEDADES DE LA ADICIÓN Y DE LA MULTIPLICACIÓN EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES	146
RESOLUCIÓN DE ECUACIONES	148
EJE N° 2: RELACIONES Y FUNCIONES. NOCIONES DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA	159
SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS	161
La recta en el plano	166
Análisis de la ecuación explícita de una recta	173
Gráficos de funciones	183
Crecimiento. Decrecimiento. Incrementos. Máximos y	

Mínimos	183
Función: ceros, continuidad. Parábola	194
Combinatoria. Probabilidad. Estadística.....	206
Recuento de casos. Variaciones. Permutaciones.	
Combinaciones	206
Experimentos aleatorios.	
Espacio muestral. Sucesos.....	218
Probabilidad de un suceso	220
Estadística	225
Interpretación de tablas. Variables.	
Frecuencia absoluta	225
Frecuencia relativa y porcentual	228
Promedio	231
Moda	232
EJE N° 3: NOCIONES GEOMÉTRICAS	239
NOCIONES GEOMÉTRICAS	241
Cantidades de superficie	241
¿Cómo hallar cantidades de superficie equivalentes? ...	246
Algunas fórmulas más utilizadas	246
Transformaciones geométricas en el plano	251
Simetría. Ubicación del eje de simetría	251
Simetría central	257
Ubicación del centro de simetría de un figura	259
Traslación	260
Rotación	263
Homotecia	266
Figuras semejantes	270
Triángulos semejantes	275
Perímetro y superficie de triángulos semejantes	279
Cuerpos	282
Elementos de algunos cuerpos	284
Redes o desarrollos de algunos cuerpos	285
Superficie lateral	286
Volumen de cuerpos geométricos	289
Calculamos cantidades de volumen	291
Capacidad y peso	295
Unidades para medir cantidades de capacidad	296
Unidades para medir cantidades de peso	297
Con el agua es un caso especial	297

BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA PARA EL ALUMNO.....	301
BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA PARA DOCENTES.....	301

INTRODUCCIÓN

Si usted se detiene a pensar en su vida de todos los días, verá que en muchas ocasiones se encuentra con situaciones en las que necesita hacer uso de los conocimientos matemáticos que aprendió en la escuela primaria o, tal vez, después. Esto nos sucede en la economía del hogar (que nos enfrenta al delicado equilibrio entre el dinero que ingresa y el que se gasta), al hacer una compra o solicitar un crédito. También en el ámbito del trabajo, cuando tenemos que hacer un croquis, medir distancias o leer un gráfico. Es decir, constantemente tenemos que utilizar lo que aprendimos en matemática para resolver pequeños o grandes inconvenientes.

En este curso le proponemos profundizar lo que sabe y avanzar en el aprendizaje de nuevos conceptos y procedimientos que le sirvan de herramientas para su trabajo y su vida cotidiana y que a su vez, le permitan resolver con más seguridad las situaciones que se presentan en los contenidos propios de esta área de estudio.

¿Qué esperamos de usted al finalizar este curso?

Al final de este curso esperamos que usted pueda: identificar, interpretar y utilizar, en la resolución de problemas, algunos conceptos matemáticos relacionados con: los números racionales, sus cálculos y operaciones, figuras planas y tridimensionales, las medidas y la medición, los gráficos y los distintos lenguajes matemáticos.

Esto significa que al finalizar el curso usted podrá:

- Comprender y saber resolver problemas justificando los procedimientos empleados.
- Identificar e interpretar números racionales, sus cálculos y operaciones.
- Identificar, describir e interpretar algunos conocimientos geométricos referidos a figuras planas y tridimensionales y a sus propiedades.
- Describir, comunicar e interpretar información matemática utilizando distintos lenguajes.
- Interpretar y usar nociones relacionadas con las medidas y los procedimientos de medición.

¿Qué vamos a estudiar? ¿Cómo vamos a hacerlo?

El curso se ha organizado en tres ejes de contenidos: el primero se denomina Conjuntos numéricos, en el segundo nos abocaremos a Relaciones y funciones y en el tercero trabajaremos

las Nociones geométricas más importantes.

Durante el cursado estudiaremos la resolución de distintas situaciones cotidianas, utilizando esencialmente dos conjuntos numéricos: enteros y racionales, sus cálculos y operaciones. También abordaremos el sistema de referencias cartesianas en el plano. Vamos a reconocer algunas figuras y entes geométricos, sus propiedades y clasificaciones. Asimismo, trabajaremos con algunas nociones de relaciones y funciones numéricas: variables, tablas, diagramas, expresiones algebraicas, gráficas, fórmulas y algunas nociones de estadística.

Esperamos que con este curso usted pueda descubrir los porqués de algunos procedimientos matemáticos. Generalmente, será usted el que, a través de algunas actividades o propuestas, construirá distintas nociones y conceptos.

Por ello, es muy importante que siga, paso a paso, las indicaciones de este material, para que pueda construir, junto con sus compañeros y profesores, cada uno de los aprendizajes.

Las actividades que se proponen tienen dos funciones principales: que pueda aplicar y relacionar lo que sabe o ha estudiado anteriormente y que pueda construir nuevos aprendizajes de contenidos, que ahora probablemente desconoce. Le recomendamos que no saltee partes del material porque las necesitará para poder avanzar con lo que se encuentre más adelante.

En algunos casos trabajaremos con nociones que por su complejidad o por su origen no vamos a comprobar, las aceptaremos como verdaderas.

Por último, le queremos decir que en matemática, como en muchas materias, el error es parte del aprendizaje. Necesitará, para avanzar en el material, hacer algunas "pruebas" de lo que está estudiando. Realice todos los intentos necesarios, pero nunca baje los brazos.

¿Cómo está organizado este material?

El material entonces está organizado en tres capítulos, uno para cada eje de contenidos, según señalábamos anteriormente.

EJE I: Conjuntos numéricos

EJE II: Relaciones y funciones. Nociones de probabilidad y estadística

EJE III: Nociones geométricas

Recuerde que todas las actividades que realizará se presentan con un icono . Estos iconos son:



PENSAR. Este icono indica que tiene que detenerse un momento a analizar lo que ha leído. En el caso de Matemática es fundamental que lea la información que indica este icono y la memorice también, porque en ella se incluye la "formalización" de lo trabajado, es decir, su conceptualización en términos matemáticos.



TRABAJAR EN FORMA INDIVIDUAL. Le indica que la actividad de aprendizaje propuesta la realizará usted solo.



TRABAJAR EN FORMA GRUPAL. Significa que la actividad de aprendizaje propuesta la realizará con sus compañeros.



RECORDAR. Este icono significa que usted leerá información importante a la que tiene que prestar especial atención.



LEER. Indica la lectura de otros textos especiales para comprender los temas.

Le recordamos también que usted, dentro del material, dispone de espacios en blanco (en cada hoja) para realizar los cálculos que necesite a fin de resolver los ejercicios que se le presenten. También tendrá, al finalizar cada eje, hojas con líneas de punto para tomar apuntes de las explicaciones de su profesor. Puede anotar también allí sus dudas, preguntas o las ideas que vayan apareciendo a medida que lee el material; justamente para esto está reservado el espacio de NOTAS.

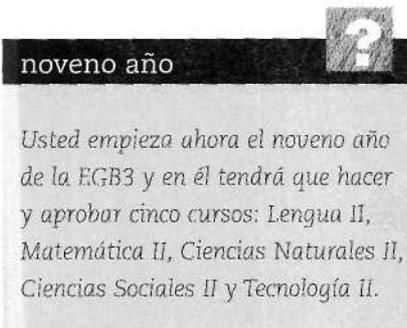
¿Cómo trabajaremos?

Esta propuesta que le hacemos está pensada con modalidad a distancia. Se preguntará ¿qué características tiene esta modalidad? Pues bien, esto significa que no asistirá todos los días a clases durante cuatro o cinco horas, sino que irá realizando el curso apoyado fundamentalmente por tres ayudas valiosas que le sugerimos aproveche al máximo:

a) Por un lado, las clases con su profesor y su grupo de compañeros, donde recibirá las explicaciones de los contenidos y se realizarán las actividades previstas. En estos encuentros usted podrá preguntar todo lo que no entiende. No dude en hacerlo, su profesor está para ayudarlo y apoyarlo en su proceso.

b) Por otro lado, tendrá a su disposición este material, para que lo lea y vaya siguiendo el curso, tanto en las clases como en las horas de estudio que deberá dedicarle diariamente. Este curso le demandará entre 4 y 6 horas de estudio por semana. Comience a organizar sus tiempos para llevarlo al día.

c) Y de ahora en adelante aparece una nueva figura en su proceso de aprendizaje: EL TUTOR. El tutor es un profesional que lo acompañará en todo su proceso de aprendizaje, tanto en este curso como en todos los que realice dentro del **noveno** año. Seguramente usted se preguntará: ¿cómo hago para estudiar?, ¿cómo organizo mi tiempo para llevar al día el estudio de los cinco cursos que forman el noveno año?, ¿de qué se trata esto de una modalidad a distancia?, ¿qué hago si tengo dudas sobre los textos del material o alguna de sus actividades y falta tiempo hasta que vea al profesor en las clases?



noveno año

Usted empieza ahora el noveno año de la EGB3 y en él tendrá que hacer y aprobar cinco cursos: Lengua II, Matemática II, Ciencias Naturales II, Ciencias Sociales II y Tecnología II.

Seguramente éstas y otras cuestiones pueden aparecer a medida que vaya realizando el material. Es justamente el tutor el que estará para solucionar esto. Usted se comunicará con él a través del "campus virtual" que la Universidad Nacional de Cuyo ha creado especialmente para este proyecto. Recuerde que en el último curso estudiamos de qué forma realizarlo. Si tiene dudas, vuelva sobre ese material y las explicaciones que le dio el profesor oportunamente.

No dude en consultarle a su tutor; él será su compañero en este camino y su tarea es fundamentalmente colaborar con usted para que tenga la menor cantidad de inconvenientes y dudas en su recorrido.

¿Cómo vamos a evaluar este curso?

En este curso vamos a tener dos tipos de evaluaciones:

- a) de proceso y
- b) de resultado.

a) Evaluaciones de proceso

Como usted sabe cada curso se organiza en ejes de contenidos dentro de los cuales hay distintas actividades de aprendizaje. Por cada eje de contenidos usted tendrá que realizar "trabajos prácticos" que entregará a su tutor vía mail (campus virtual). Él le indicará cuáles son y en qué momentos se los debe entregar. Por eso resulta importantísimo que no pierda el contacto con él y entre al campus periódicamente. Estos trabajos prácticos serán corregidos y se les asignará una nota numérica.

A su vez, para cada eje de contenidos, le propondremos una evaluación sobre todos los contenidos desarrollados dentro del mismo y que usted ha ido estudiando con el material. Esta evaluación podrá resolverla de dos formas distintas:

- con el profesor durante las clases.

- O bien en su casa. En este caso, su tutor le enviará a través del campus virtual la evaluación y usted la resolverá y entregará en papel a su profesor durante las clases.

Tanto su profesor como el tutor le irán indicando las fechas y cuál de estas dos formas se utilizará para realizar las evaluaciones. Estas evaluaciones de eje serán corregidas y también se les asignará una nota numérica.

RECORDAR



Con las notas de los trabajos prácticos entregables y de la evaluación de eje, se hará un promedio numérico y así se obtendrá la calificación que le corresponde a ese eje de contenidos. De la misma manera se procederá con todos los ejes previstos para el curso.

b) Evaluación de resultado

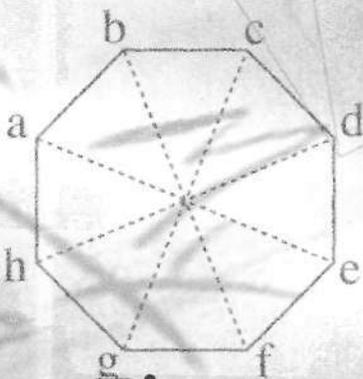
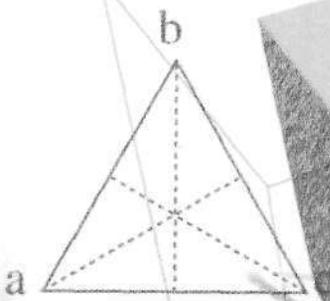
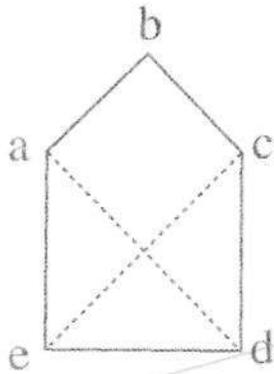
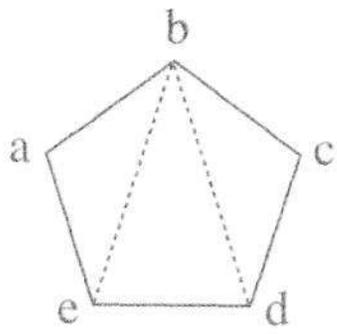
Al finalizar el curso se realizará una evaluación integradora, es decir, una evaluación que nos permita conocer cómo ha sido su proceso en el aprendizaje de todos los contenidos del curso. Esta evaluación se hará siempre en las clases con su profesor y también serán corregidas con una calificación numérica.

RECORDAR



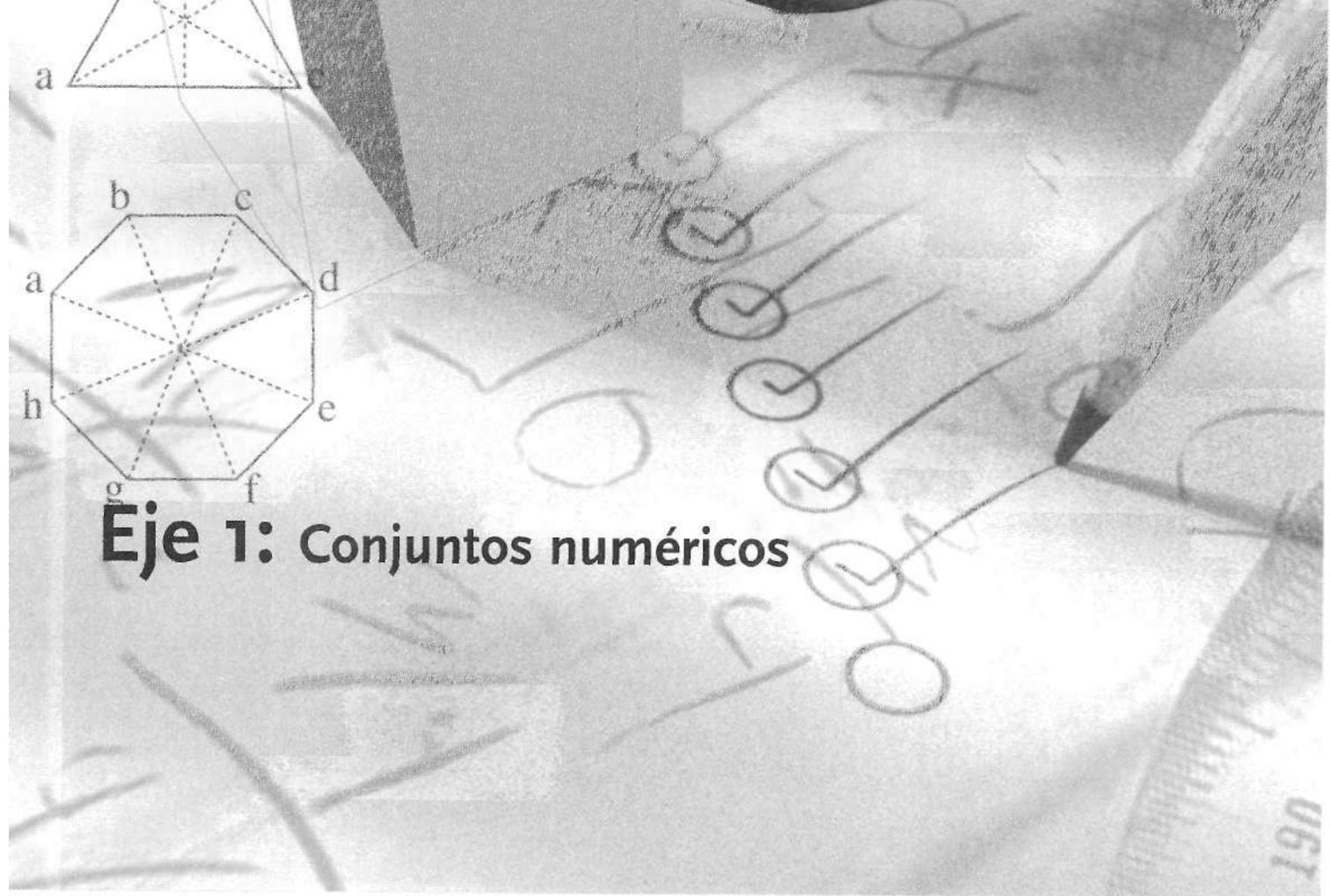
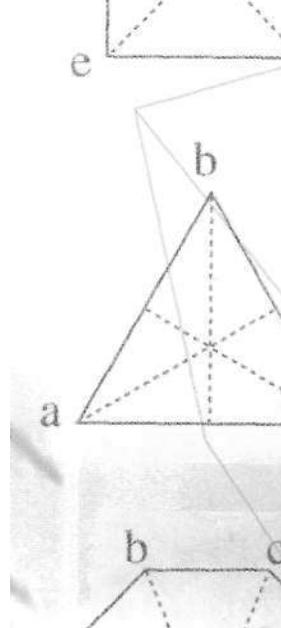
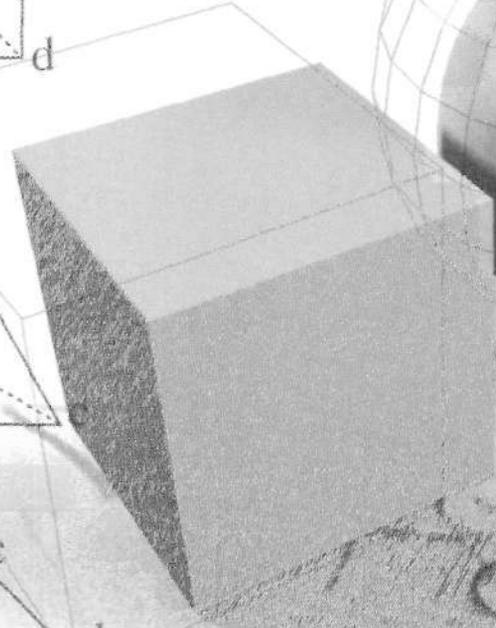
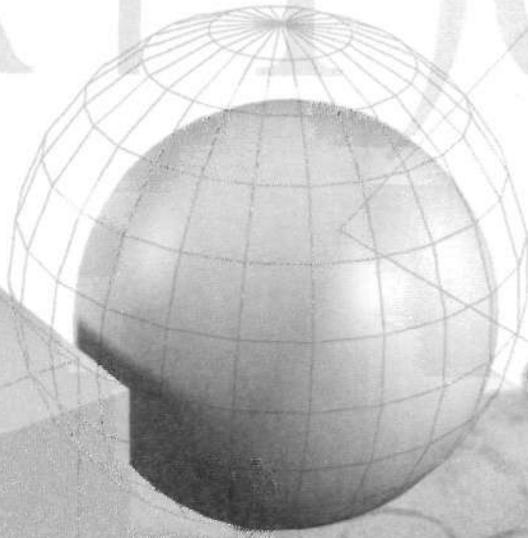
La calificación definitiva del curso resultará de promediar las notas que obtuvo en cada eje de contenidos junto con la que obtuvo en la evaluación integradora.

En todos los casos, para calificar utilizaremos una escala numérica de 1 a 10, debiendo obtener como mínimo siete para aprobar el curso. En caso de no aprobar en esta instancia, usted tendrá derecho a una "evaluación recuperatoria", es decir, tendrá tiempo para volver a estudiar el material antes de que sea evaluado nuevamente. Esto también se lo informará su tutor.



Eje 1: Conjuntos numéricos

$$(x^2 + 1) dx =$$



¿Qué esperamos que usted logre cuando termine este eje?

Al final de este eje esperamos que usted pueda:

- Comprender y saber resolver problemas, seleccionando el tipo de razonamiento, interpretando los resultados y justificando los procedimientos empleados.
- Identificar e interpretar conocimientos referidos a números racionales, sus cálculos y operaciones.

¿Qué vamos a estudiar?

Algunos de los contenidos más importantes que vamos a estudiar son:

- Números reales, racionales e irracionales. Intervalos.
- Criterios de divisibilidad.
- Las cuatro operaciones básicas con números racionales bajo distintas notaciones. Potencia. Radicación. Propiedades.
- Expresiones algebraicas. Operaciones sencillas con expresiones algebraicas. Ecuaciones.

Un pequeño comentario acerca de lo que usted va a realizar en este comienzo. Trabajaremos con los distintos conjuntos de números o conjuntos numéricos. Para referirnos a cada uno de esos conjuntos utilizaremos letras mayúsculas. Así por ejemplo usaremos **IN** para designar el conjunto de números naturales, es decir el conjunto formado por los números: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; etc.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

ACTIVIDADES



1. Lea con atención y *resuelva cada una de* las siguientes situaciones:

Situación 1

EQUIPOS	PUNTOS
River	33
Boca	31
Racing	27
Talleres	25
Quilmes	24
Vélez	23
Banfield	22
Arsenal	21
Colón	19
San Lorenzo	17
Estudiantes	15

La siguiente tabla muestra algunos equipos de fútbol y los puntos que tienen hasta la fecha:

a) ¿Por qué *cree* que los equipos *aparecen en la tabla en ese orden*?

b) ¿De qué depende la posición *de los equipos en la tabla*?

Los equipos están ordenados según los puntos alcanzados hasta la fecha, desde el equipo que tiene más puntos al que tiene menos. Este orden de los equipos permite determinar qué lugar ocupa cada equipo en la tabla de posiciones.

c) Así por ejemplo: ¿qué lugar ocupa en la tabla el equipo de Arsenal?

d) ¿Y el equipo de Quilmes?

e) Para responder a las preguntas: ¿Qué hizo?, ¿qué estrategia utiliza?

.....

.....

Coincidirá en que para indicar el lugar de un equipo lo que se hace es contar-numerar o simplemente numerar (1, 2, 3, ...) desde el primer lugar hasta llegar al lugar del nombre del equipo que se quiere ubicar. Por ejemplo, para decir qué lugar de la tabla ocupa el equipo de Colón, se numera desde el lugar que ocupa el primer equipo (River) hasta llegar al lugar que ocupa Colón, de esta manera: "1" (River), "2" (Boca), "3" (Racing), y así hasta llegar a "9" (Colón). Es decir que Colón ocupa el lugar número nueve en la tabla de posición. Esto también se expresa indicando el nombre del lugar número nueve, es decir noveno y se suele decir que "Colón es el noveno en la tabla de posiciones".

De manera similar, se puede decir que Arsenal ocupa el lugar número 8 en la tabla de posiciones, es decir el octavo lugar (el lugar número 8 recibe el nombre de octavo) y también que Quilmes ocupa el lugar número 5, es decir el quinto lugar en la tabla de posiciones (el lugar número 5 se llama quinto).

f) ¿Cuál equipo ocupa el tercer lugar?, ¿y cuál ocupa el décimo lugar?

.....

.....

Situación 2

Martín nació en el año 1987. ¿Cuántos años tenía en 1997?

.....

.....

Para averiguar los años que tenía Martín en 1997 usted pensó en el cálculo: $1997 - 1987 = 10$, o lo que bien pudo hacer es contar los años transcurridos desde 1987 hasta 1997.

En estas dos situaciones sencillas se han utilizado expresiones como "están ordenados", "es el quinto en la tabla", "numerar", "contar".

Los números que se utilizan para contar - enumerar, es decir para responder a la pregunta ¿Cuántos? y para numerar, es decir para responder a la pregunta ¿En qué lugar? (contar-numerar) son los números naturales.

PENSAR



NOTAS

El conjunto de los números naturales se simboliza con la letra \mathbb{N} , y en símbolos se puede expresar:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Se lee: el conjunto \mathbb{N} es igual al conjunto formado por los elementos 0, 1, 2,.....

Recuerde que los puntos suspensivos indican que se pueden seguir escribiendo más elementos.

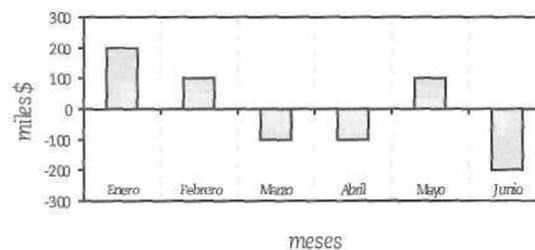
EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

ACTIVIDADES



Situación 1

Variación de Finanzas



1. En el gráfico se muestran las pérdidas y ganancias, o sea la variación de las finanzas, de una empresa durante el primer semestre.

a) Indique en qué meses la empresa tuvo pérdidas y en qué meses tuvo ganancias.

.....

b) ¿Cómo se diferencian las cantidades que indican pérdidas de las que indican ganancias?

.....

c) Analice si entre mayo y junio la empresa tuvo pérdidas o ganancias.

.....

d) Calcule la diferencia del estado financiero entre los meses de enero y febrero.

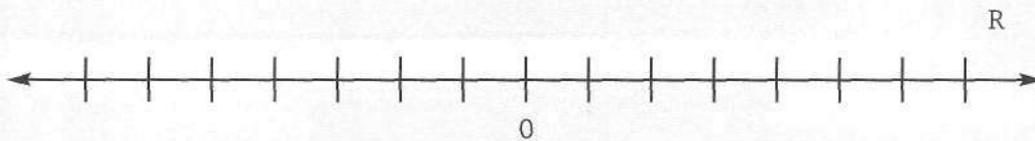
.....

Está claro que utilizando los números naturales solamente no es posible describir la variación de finanzas. Tampoco sería posible calcular la diferencia del estado financiero de los meses de enero y febrero con la siguiente resta de números naturales: $100 - 200 = A$ a partir del análisis de esta situación se ve la necesidad de "ampliar" el conjunto de los números naturales. ¿Cómo se lleva a cabo esta ampliación?

¿Cuál es el número opuesto al número 5?

¿Cuál es el número opuesto al número -3?

Para encontrar el número opuesto al número 5, hay que pensar en un número que, ubicado en la recta numérica, esté a la misma distancia del 0 que el número 5. Este número es el número -5. Es decir, que tanto el 5 como el -5 están a la misma distancia del cero. Ubique en la siguiente recta numérica los números 5 y -5.



2. Ubique en la recta numérica anterior el número -3 y su opuesto.

3. ¿Por qué el número 3 es el opuesto del número -3?

.....
.....

NOTAS



PENSAR

Para cada número natural "a", distinto de cero, existe su opuesto "-a".

El conjunto formado por los números naturales y todos los números opuestos a ellos forman un nuevo conjunto que es el de los números enteros. También podemos decir que el conjunto de números enteros está formado por los números enteros positivos (o naturales) y los números enteros negativos (números opuestos a los números naturales).

El conjunto de los números enteros se simboliza con la letra Z, cuya notación es:

$$Z = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Se lee: el conjunto de los números enteros es igual al conjunto formado por los elementos ...-3, -2, -1, 0, 1, ...

Los números enteros sirven para expresar cantidades de temperatura sobre y bajo cero, montos de deudas como también para resolver el punto d) de la situación 1, que pide calcular la diferencia en el estado financiero de los meses de enero y febrero.

Recuerde que el cálculo a resolver es: $100 - 200$ y que en el conjunto de los números enteros es posible resolverlo:

- $100 - 200 = -100$

El resultado es -100 . Este número es negativo, lo que indica que la empresa tuvo pérdidas en un monto de \$100.000 entre los meses de enero y febrero. Puede observar, a través de este ejemplo, que es posible resolver restas entre dos números enteros cualesquiera y que se obtiene otro número entero.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Hasta el momento con el conjunto de los números naturales y enteros hemos solucionado problemas propios del quehacer cotidiano tales como ordenar, interpretar con cantidades negativas situaciones como temperatura bajo cero, profundidad y altura con respecto al nivel del mar, interpretación de las finanzas de una empresa, por nombrar sólo algunas. Como verá ahora, a partir del análisis de las siguientes situaciones, será necesario ampliar el conjunto de los números enteros.

Situación 1

Usando los números enteros no es posible escribir expresiones como las que se muestran a continuación:

a) La temperatura exterior es de $25,5^{\circ}\text{C}$ bajo cero.

RECORDAR



Recuerde que $25,5^{\circ}\text{C}$ es una cantidad de temperatura, donde el $25,5$ es la medida de dicha cantidad (el número) y $^{\circ}\text{C}$ (grados centígrados) es la unidad usada para medir la temperatura.

b) El 70% de los accidentes automovilísticos se deben al exceso del consumo de alcohol del conductor. Esto significa que de cada 100 accidentes automovilísticos, 70 de ellos se deben a excesos de consumo de alcohol de los conductores.

c) La selva americana ocupa las cinco novenas partes de los $9.300.000\text{ km}^2$ de la superficie de las selvas del mundo.

d) Por último, se pretende encontrar el cociente exacto entre

NOTAS

NOTAS

el número 8 y 5, es decir resolver la división $8 : 5$ y encontrar un número que multiplicado por 5 dé por resultado 8. Está claro que dicho cociente no es un número entero ya que no existe ningún número entero que multiplicado por 5 dé por resultado 8.

Usted observará, a través de los ejemplos mencionados, que en a) la medida de cantidad de temperatura exterior es 25,5 y éste no es un número entero, en b) que 70%, es equivalente a expresar este porcentaje con el número $\frac{70}{100}$, (expresado en forma fraccionaria) y que tampoco es un número entero, en c) que para indicar qué parte del total de la cantidad de superficie de selvas del mundo corresponde a la selva americana se usa el número $\frac{5}{9}$, que no es un número entero y finalmente que, en d), el cociente de la división entre los números enteros 8 y 5 no es exacto en el conjunto de los números enteros. Pues ningún número entero multiplicado por 5 da 8.

El cociente exacto entre 8 y 5 es $\frac{8}{5}$. Puesto que: $8 : 5 = \frac{8}{5}$,

porque $\frac{8}{5} \cdot 5 = 8$ (pues $8 \cdot 5 = 40$ y $40 : 5 = 8$).

Los números que se han empleado tanto para expresar la medida de una cantidad de temperatura, para indicar un porcentaje de accidentes con determinadas características, para señalar una parte de un todo (superficie total de selva del mundo), como para encontrar el cociente exacto de dos números enteros, son números racionales. Los números que pertenecen al conjunto de los números racionales se simbolizan con la letra \mathbb{Q} .

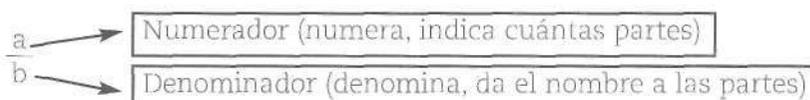
En las situaciones anteriores se han utilizado números racionales escritos (o expresados) mediante una fracción y también mediante escritura decimal (el caso de 25,5). Más adelante profundizaremos sobre las formas de expresar un número racional.

Por ahora diremos que: **un número racional escrito en forma fraccionaria es el cociente exacto de dos números enteros, siendo el segundo distinto de cero.**

Por ejemplo:

En un número racional escrito como fracción:

$\frac{a}{b}$, a y b son números enteros y b es distinto de cero, se tiene que:



Una pregunta: ¿los números naturales y los enteros son también números racionales?

ACTIVIDADES



1. Resuelva los siguientes cocientes:

a) $\frac{8}{-2} = \dots\dots\dots$ b) $\frac{-10}{-5} = \dots\dots\dots$ c) $\frac{30}{2} = \dots\dots\dots$ e) $\frac{20}{1} = \dots\dots\dots$ e) $\frac{-54}{1} = \dots\dots\dots$

Resultados:

a) -4 porque $-4 \cdot (-2) = 8$, b) 2 porque $2 \cdot (-5) = -10$, c) 15 porque $15 \cdot 2 = 30$, d) 20 porque $20 \cdot 1 = 20$
e) -54 porque $-54 \cdot 1 = -54$

A partir de los cocientes obtenidos podemos asegurar que:

1. Cualquier número entero, es posible expresarlo siempre como un cociente exacto de dos números enteros con la condición de que el denominador o divisor sea distinto de cero.

2. Todo número entero se puede expresar como fracción con numerador igual a dicho número y denominador igual a uno.

PENSAR



Podemos asegurar que todo entero es un número racional, por ello se dice que el conjunto de los números enteros (\mathbb{Z}) está incluido en el conjunto de los números racionales (\mathbb{Q}).

Esta conclusión se indica simbólicamente: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Se lee: el conjunto de los números enteros está incluido en el conjunto de los números racionales.

**DISTINTAS ESCRITURAS DE UN NÚMERO RACIONAL (FRACCIONARIA, DECIMAL).
EXPRESIONES DECIMALES FINITAS Y PERIÓDICAS**

ACTIVIDADES



1. ¿Los números 27,5; 1,75 y -25, 5 son números racionales?

.....

2. Con la calculadora realicen los siguientes cocientes escritos en forma fraccionaria y escriban la expresión decimal que aparece en el visor.

Notación fraccionaria	Notación decimal
$\frac{275}{10} =$	27,5
$\frac{175}{100} =$	
$\frac{-255}{10} =$	
$\frac{7}{-2} =$	
$\frac{4}{9} =$	
$\frac{7}{6} =$	
$\frac{37}{33} =$	1,121212121...

3. Observen, identifiquen y escriban los números racionales cuyas expresiones decimales tienen un número de cifras decimales finito (se pueden contar, las cifras decimales no cubren todo el visor de la calculadora).

Si en lugar de usar la calculadora realiza el cálculo en un papel, observarán que llegan a un resto cero. Los números racionales que poseen esta característica son **racionales decimales** o simplemente **decimales**. Por ejemplo, al realizar el cociente $275 : 100$ se obtiene el número racional 2,75 y el resto es cero.

4. Observen, identifiquen y escriban los números racionales que tienen una expresión decimal en la que se observan (en el visor de la calculadora) infinitas cifras después de la coma (las cifras decimales cubren todo el visor de la calculadora).

En las expresiones decimales de estos números racionales se observa que algunas cifras después de la coma se repiten indefinidamente. Por ejemplo: 1,12121212.... Por ello, se llaman expresiones decimales periódicas y a la cifra o cifras que se repiten se las denomina período.

Estas expresiones decimales periódicas se pueden expresar de esta forma: $1,\overline{12}$.

A continuación se muestran dos cuadros referidos a los puntos 3) y 4), en los que se muestra cada número racional expresado como fracción y en notación decimal, con el propósito de que ustedes comparen las expresiones decimales.

$$\frac{275}{10} = 27,5$$

$$\frac{175}{100} = 1,75$$

$$\frac{-255}{10} = -22,5$$

$$\frac{7}{-2} = -3,5$$



Estos números racionales en su expresión decimal tienen una cantidad finita de cifras decimales, lo que indica que al realizar la división entre el numerador y denominador de la expresión fraccionaria se llegará a un resto cero.

Estos números racionales se llaman **números racionales decimales o simplemente números decimales**. Por lo que, por ejemplo, los números $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$, 1,75; 0,23 son números decimales.



PENSAR

Todo número racional puede escribirse en notación fraccionaria -mediante una fracción- o en notación decimal o expresión decimal como un número con coma decimal. Esta expresión decimal puede ser finita o infinita periódica.

ALGUNOS NÚMEROS IRRACIONALES

Lea los siguientes ejemplos:

a) $\sqrt{4} = 2$ porque $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

b) $\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$

Al calcular la raíz cuadrada de 4, en el ejemplo a), se busca un número racional positivo que elevado al cuadrado (multiplicado dos veces por sí mismo) dé por resultado 4; dicho número es 2 (resultado de la raíz). De manera similar se procede en el ejemplo b).

$$\frac{4}{9} = 0,4444444444444444... = 0,\overline{4}$$

$$\frac{7}{6} = 1,1666666666666666... = 1,1\overline{6}$$

$$\frac{37}{33} = 1,121212121... = 1,1\overline{2}$$



Estos números racionales, en su expresión decimal, tienen infinitas cifras decimales, lo que muestra que al realizar la división entre el numerador y denominador de la expresión fraccionaria, nunca se llegará a un resto cero.

Recuerde que con el arco se indican las cifras decimales que se repiten infinitamente, es decir, el período.



NOTAS

NOTAS

Ahora le proponemos trabajar con el cálculo de la siguiente raíz cuadrada: $\sqrt{3}$ (raíz cuadrada de 3). Recuerde que si usted desea calcular esa raíz tendrá que buscar un número que elevado al cuadrado, es decir multiplicado 2 veces por sí mismo, dé por resultado 3. Si prueba con $1,5^2$ ($1,5 \cdot 1,5$) obtiene 2,25 y es menor que tres. Si ahora prueba con $1,7^2$ ($1,7 \cdot 1,7$) da como resultado 2,89 y es menor que tres. Quizás pensó en probar con $1,8^2$ ($1,8 \cdot 1,8$): da por resultado 3,24 y resulta ser mayor que tres.

Si sigue probando con otros valores puede obtener resultados más próximos a tres, pero le será imposible encontrar un número racional que elevado al cuadrado dé exactamente tres.

Si emplea la calculadora encontrará que $\sqrt{3}$, cifras más o cifras menos, es igual a un número en notación decimal como el siguiente:

$\sqrt{3} = 1,732050807568877293527446341505\dots$ puede observar que las cifras decimales son infinitas y no periódicas, por lo que no es un número racional.

Lo mismo ocurre con otras raíces que tienen la misma característica, es decir, que no dan por resultado un número racional, como son las raíces: $\sqrt{7}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$.

A estos números se los denomina números irracionales.



ACTIVIDADES

1. Exprese el resultado de las raíces anteriores en notación decimal:

a) $\sqrt{7} = \dots\dots\dots$

b) $\sqrt{5} = \dots\dots\dots$

c) $\sqrt{2} = \dots\dots\dots$

a) $\sqrt[3]{7} = \dots\dots\dots$

2. ¿Qué ocurre con la parte decimal de estos números?

.....

Posiblemente pensó en que es infinita, es decir, que tienen infinitas cifras decimales. Pero a esta característica se le agrega otra: las cifras decimales no son periódicas.

Hay otros números que tienen esta misma característica en su parte decimal, como el conocido número pi (π) que es utilizado para calcular la medida de la longitud de la circunferencia ($\pi \cdot d$, donde d es el diámetro) y la medida de la cantidad de superficie de

un círculo ($\pi \cdot r^2$, donde r es el radio). La escritura decimal del número "pi" tiene infinitas cifras decimales no periódicas, como se muestra a continuación: $\pi = 3,141592653589793238462643383279\dots$
 Dadas las características de este número, podemos decir que es un número irracional.

Estos números analizados pertenecen al conjunto de los números irracionales.

PENSAR



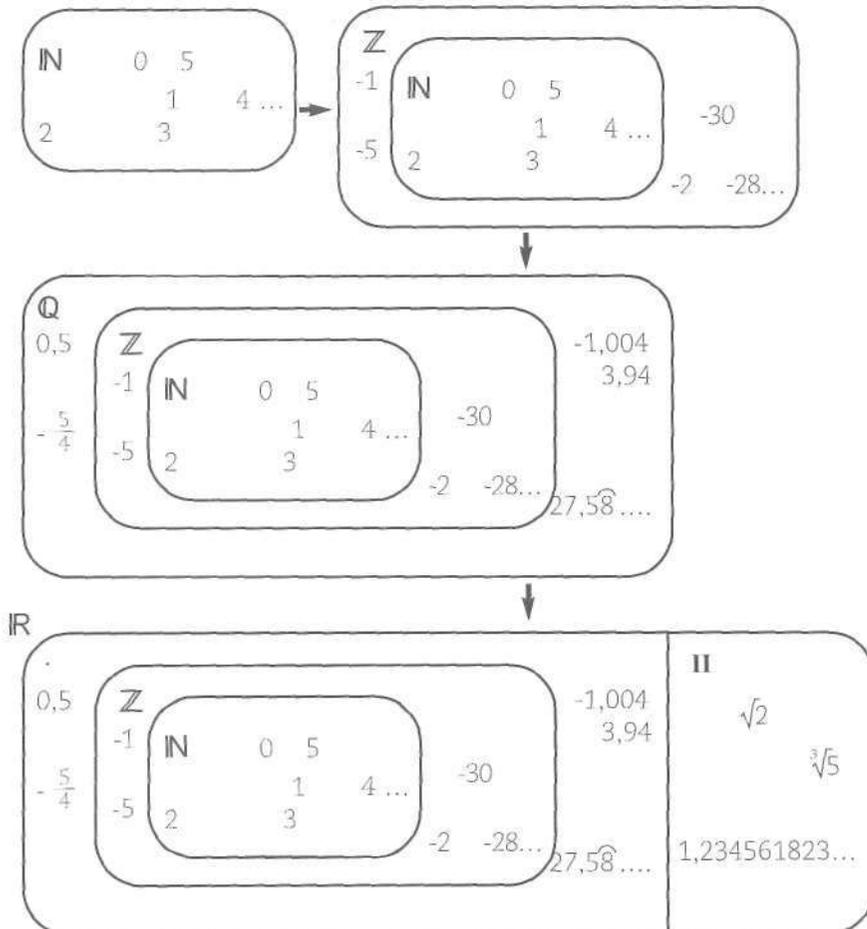
El conjunto de los números irracionales se simboliza así: \mathbb{I} .

Los elementos de este conjunto son raíces no exactas (raíces cuyos resultados no son enteros) o bien números que expresados en notación decimal tienen infinitas cifras decimales que no son periódicas.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Si se reúnen todos los números racionales y los números irracionales se obtiene un nuevo conjunto numérico llamado conjunto de los números reales, que se simboliza así: \mathbb{R} .

En el siguiente esquema se muestra una síntesis de las sucesivas ampliaciones de los conjuntos de números naturales, enteros, racionales e irracionales.



NOTAS



PENSAR

El conjunto de los números reales se simboliza con \mathbb{R} y se define como:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Se lee: el conjunto de los números reales es igual al conjunto de los números racionales más el conjunto de los números irracionales.



RECORDAR

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Se lee: el conjunto de los números naturales está incluido en el conjunto de los números enteros y éste está incluido en el conjunto de los números racionales.

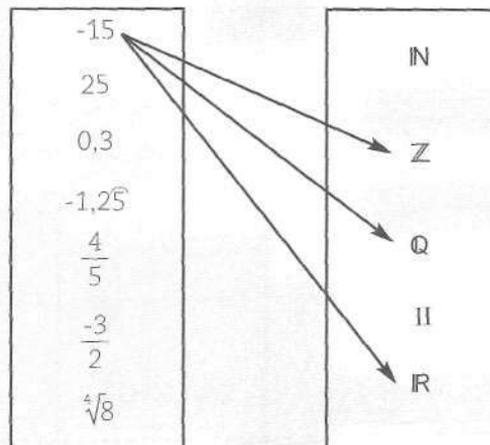
El conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales no tienen elementos en común. Es decir, no existe un número que sea racional e irracional a la vez.

Un número real es un número racional (se puede expresar como el cociente de dos números enteros con el denominador distinto de cero) o es un número irracional (número que expresado en notación decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas).



ACTIVIDADES

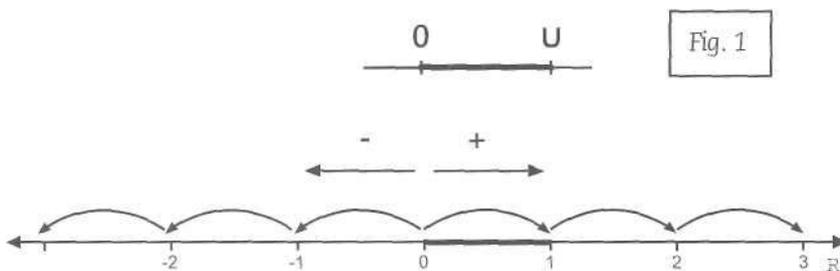
1. Realicen la siguiente actividad uniendo con flechas cada número con el o los conjuntos al que pertenece. Les puede ayudar la observación del diagrama de los números reales. Se muestra un ejemplo.



LA RECTA REAL

Los números pueden ser representados en una recta R , llamada recta real. Para ello se graduará la recta a partir de una unidad, como muestra la figura.

Para graduar la recta se considera un punto "0" y se elige un segmento U como unidad para medir. Luego se dibujan segmentos congruentes al segmento U en forma consecutiva a partir del punto 0 a izquierda y derecha del mismo y a cada punto se le asigna un número entero.



RECORDAR



Recuerde: una recta puede pensarse como un conjunto de infinitos puntos.

Observe la recta numérica R y responda: ¿cada punto de la recta R tiene asignado un número entero?

Por ello, suele decirse que los números enteros al ser ubicados en la recta numérica "no cubren" toda la recta, ya que quedan puntos de la misma a los que no se les puede hacer corresponder un número entero.

¿Entre dos números enteros siempre es posible encontrar otro número entero? Piense por ejemplo en los números enteros 2 y 3 ¿hay otro número entero entre ellos?

Si ahora tiene que ubicar en la recta numérica un número racional, por ejemplo el número $\frac{3}{5}$: ¿entre qué números enteros lo ubicaría? ¿Por qué?

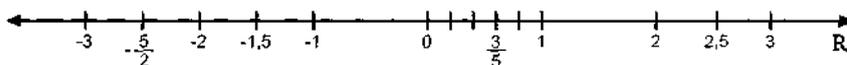
Para representar números racionales, como por ejemplo, $\frac{3}{5}$, y como es un número racional que es menor que uno y mayor a cero (tiene el numerador menor al denominador $3 < 5$), se ubica en

NOTAS

NOTAS

la recta numérica entre los puntos correspondientes al número 0 y al número 1. Por ello se fracciona el segmento a cuyos extremos le corresponden los números 0 y 1 en tantos segmentos o partes como lo indica el denominador. Observe que las partes son todas congruentes, es decir son segmentos congruentes (segmentos equivalentes en longitud). En este caso el segmento unidad está fraccionado en 5 partes equivalentes porque el denominador del número racional a representar es 5 y se señala la tercer "marca" o parte, porque el número a ubicar en la recta tiene numerador tres. De esta forma queda ubicado el punto al cual se le asigna el número $\frac{3}{5}$.

Fig. 2



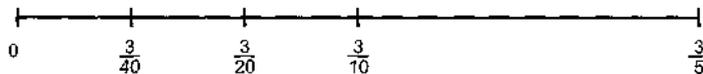
Ahora marque el punto medio del segmento cuyos extremos tienen asignados los números 0 y $\frac{3}{5}$. A ese punto asígnele el número racional $\frac{3}{10}$.

De esta manera, si procede de forma similar y marca el punto medio del segmento cuyos extremos tienen asignados los números 0 y $\frac{3}{10}$.

A dicho punto le debe asignar el número racional $\frac{3}{20}$, y así se podría continuar esta asignación indefinidamente.

Seguramente, si ubicó los puntos que le corresponden a los números $0, \frac{3}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{20}$ debe haber obtenido una representación como la siguiente; en la que se muestra sólo el segmento de la recta numérica que tiene por extremos los puntos correspondientes a los números 0 y $\frac{3}{5}$.

Fig. 3



Notará que se pueden seguir señalando infinidad de puntos más, a los que se les asigna su correspondiente número racional siguiendo este procedimiento de señalar el punto medio de cada segmento que se considera, como se efectuó en el análisis anterior.

Esta característica señala que siempre es posible encontrar entre dos números racionales otro número racional. Pero a pesar de poseer esta característica, si se representaran todos los

NOTAS

De todos modos, si se ubicaran todos los números racionales quedarían puntos de la recta a los que no les correspondería ningún número racional, es decir que no es posible "cubrir" toda la recta numérica.



PENSAR

Para cubrir toda la recta numérica es necesario representar a todos los números racionales y a todos los irracionales, es decir ubicar los números reales.

A partir de esta última observación podemos asegurar que la recta está completa.

Al ubicar los números reales en la recta numérica "se cubren" todos los puntos de la misma, ya que a cada número real le corresponde un punto de la recta y a cada punto de la recta le corresponde un número real.

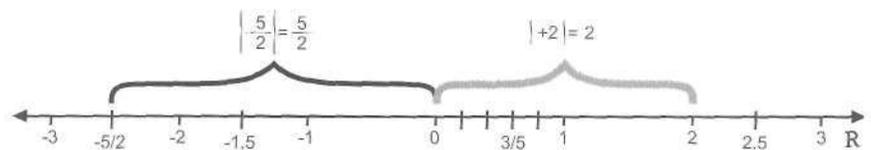


RECORDAR

En adelante cuando nos refiramos a un número y no aclaremos a qué conjunto numérico pertenece dicho número, es decir, cuando no se especifique: "número racional", "número natural", "número entero" o "número irracional", es porque el número considerado es un "número real". Estudiaremos estos números por lo que acordaremos que cuando consideremos un número, estaremos considerando un número real.

VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

Seguimos trabajando sobre la recta numérica. Observe el siguiente gráfico y particularmente cada una de las llaves.



Cada una de las llaves está indicando la distancia en la recta numérica de los números $-\frac{5}{2}$ y 2 al número cero. A esta distancia se la llama **módulo** o **valor absoluto** del número $-\frac{5}{2}$ y módulo o valor absoluto del número 2 .

Simbólicamente el módulo se indica:

- $|-2| = 2$ se lee: el módulo o valor absoluto del número -2 es

igual a 2 y se interpreta que la distancia del número -2 al número cero en la recta numérica es igual a 2.

• $|\frac{-5}{2}| = \frac{5}{2}$ se lee: el módulo o valor absoluto del número $-\frac{5}{2}$ es igual a $\frac{5}{2}$ y se interpreta que la distancia del número $-\frac{5}{2}$ al número cero en la recta numérica es $\frac{5}{2}$.

ACTIVIDADES



1. Observe que el módulo de un número siempre es un número positivo. ¿Por qué cree usted que esto es así? (Para responder piense en el significado de módulo en relación a la noción de distancia).

.....

2. Anote usted otros módulos simbólicamente y escriba su interpretación.

.....

.....

.....

.....

.....

PENSAR

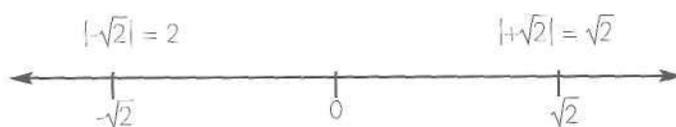


Se llama *valor absoluto o módulo de un número real* a la distancia de dicho número al cero. Esta distancia es siempre un número real positivo.

Simbólicamente: "a" es un número real $|a|$ y se lee: módulo de a.

NÚMEROS OPUESTOS

1. Observe la siguiente recta numérica y los números ubicados en ella.



a) ¿Qué puede decir acerca de las distancias al número cero de los números $+\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ respectivamente?

.....

NOTAS

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



PENSAR

Dos números reales son opuestos si tienen el mismo valor absoluto o módulo y distinto signo.

ORDEN

Para ordenar números reales es necesario compararlos. Esta comparación se realiza a través de los valores absolutos de las expresiones decimales de los números racionales o irracionales.



ACTIVIDADES

1. Complete con mayor (>), menor (<) o igual (=) según corresponda.

- a) $\frac{4}{9}$ 0,25 b) -0,751 -0,75 c) $\frac{4}{7}$ $\frac{2}{3}$ d) -0,8 $\sqrt{0,25}$

2. A continuación se resuelve el ejercicio para que pueda verificar sus resultados.

- a) $\frac{4}{9}$ 0,25

NOTAS

Para comparar estos dos números racionales, cuando uno está expresado en notación fraccionaria y el otro en notación decimal, le sugerimos expresar ambos números en una misma forma.

Expresa el número $\frac{4}{9}$ en notación decimal o el número 0,25 en notación fraccionaria.

Seguramente, si optó por trabajar en notación decimal, obtuvo:

$$\frac{4}{9} = 0,44444 = 0,4\overline{4}$$

En este caso la parte entera es la misma; entonces será necesario comparar la parte decimal.

Para ello iguale el orden decimal de los números, -en este caso deberían ser del orden de los centésimos (ambos números deberían tener dos cifras decimales)- y compare la parte decimal obtenida.

Debe comparar 0,44 (cuarenta y cuatro centésimos) y 0,25 (veinticinco centésimos). Se tiene que $44 > 25$ luego como ambos números son positivos, se puede expresar $\frac{4}{9} > 0,25$.

Pero también pudo considerar la expresión fraccionaria de

0,25 y así obtener: $0,25 = \frac{25}{100}$ ¿Cuál es la fracción irreducible equivalente a $\frac{25}{100}$?

NOTAS

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

¿Recuerda esta expresión?

.....

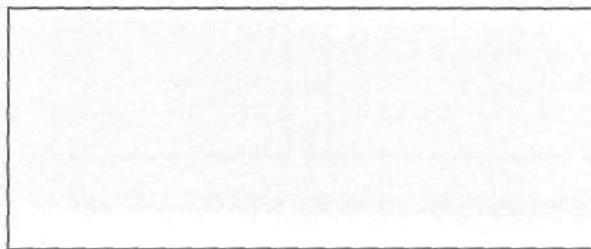
Para responder a esta pregunta debe recordar qué es una fracción equivalente, cómo se obtiene y qué es la expresión fraccionaria irreducible de un número racional.

¿Qué es una fracción equivalente?

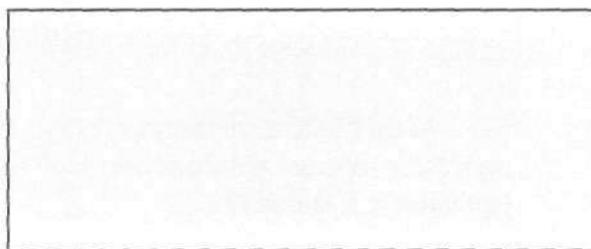


ACTIVIDADES

1. Le proponemos colorear las dos octavas partes ($\frac{2}{8}$) de este rectángulo:

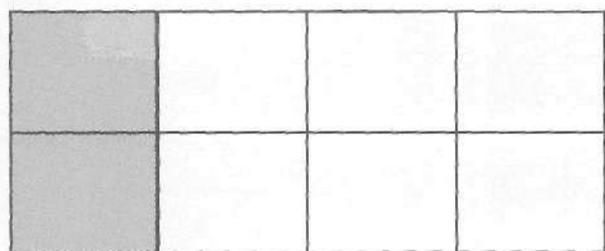
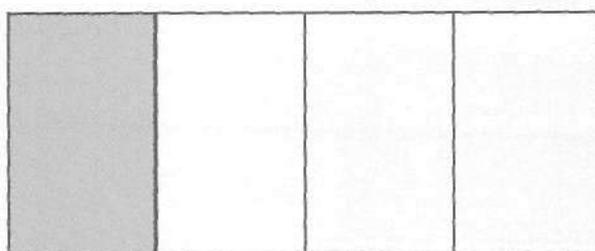


2. Ahora coloree la cuarta parte ($\frac{1}{4}$) del siguiente rectángulo (que tiene las mismas medidas que el anterior).



3. Compare las partes sombreadas del rectángulo. ¿Cómo resultan?

4. Observe a continuación una posible representación de los rectángulos fraccionados: el primero en cuartos y el segundo en octavos. Se ha coloreado en el primero una cuarta parte del rectángulo y en el segundo dos octavas partes del mismo. No necesariamente las representaciones que obtuvo antes deben coincidir con éstas, pero deben resultar equivalentes, es decir, representar la cuarta parte en un caso y las dos octavas partes en el otro.

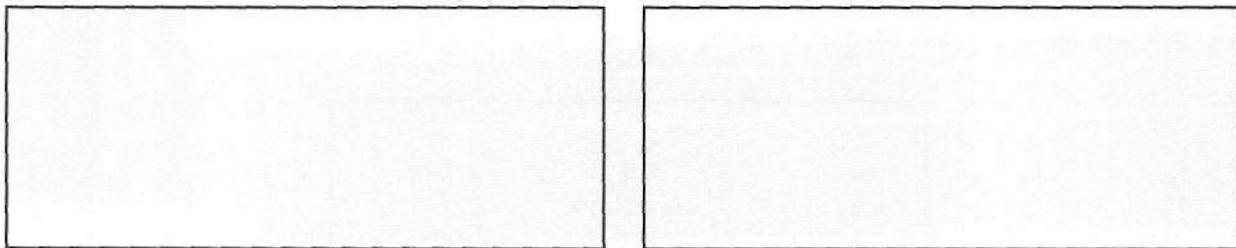


Como la parte sombreada en ambos casos representa la misma porción de rectángulo se dice que ambas fracciones son equivalentes y se escribe: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Si observa esta expresión y divide numerador y denominador de la primera expresión por un mismo número por 2 ¿Qué obtiene?

Efectivamente al dividir numerador y denominador de una fracción por un mismo número entero (distinto de cero) se obtiene una fracción equivalente a la dada. Se dice que la primera expresión se ha simplificado.

5. ¿Qué sucede si al numerador y denominador de una fracción se los multiplica por un mismo número? Pruebe con un ejemplo, por ejemplo con $\frac{1}{2}$, y realice la representación gráfica de ambas expresiones coloreando la parte del rectángulo correspondiente a cada expresión en cada uno de los rectángulos que tienen las mismas medidas.



a) Compare la parte coloreada e indique cómo resultan estas dos fracciones.

NOTAS

Al multiplicar numerador y denominador de una fracción por un mismo número entero (distinto de cero) se obtiene una fracción equivalente a la dada.

¿Cómo se obtienen las fracciones equivalentes a una dada?

Creemos que usted ya está en condiciones de responder al interrogante planteado. Revise el camino que ha seguido y hágalo:

Para obtener fracciones equivalentes a una dada, se debe multiplicar o dividir el numerador y el denominador de la fracción por un mismo número entero distinto de cero.

¿Qué es la expresión irreducible de un número racional expresado como fracción?

NOTAS

Considere la fracción $\frac{25}{100}$, simplifíquela complete el cuadro con la fracción equivalente obtenida:

$\frac{25}{100} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$
--

A la nueva fracción: ¿es posible volver a simplificarla? Hágalo todas las veces que pueda y escriba la última expresión que obtenga.

$\frac{25}{100} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$
--

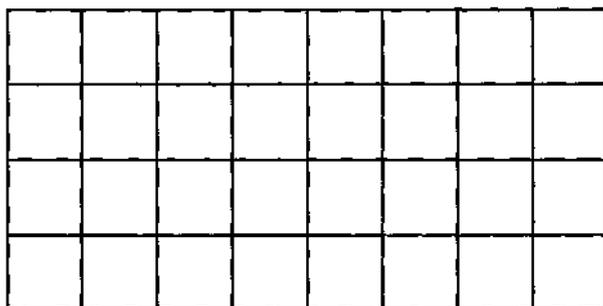
Esta última expresión obtenida, $\frac{1}{4}$, es la expresión irreducible de $\frac{25}{100}$.

Para encontrar la expresión irreducible de un número expresado como fracción se busca una fracción equivalente a la dada pero que no sea posible simplificarla.

Ahora hay que comparar dos expresiones fraccionarias: $\frac{4}{9}$ y $\frac{1}{4}$. ¿Cómo lo hace?

Muestre, a través de un gráfico, cómo compararía estos números expresados en notación fraccionaria.

A continuación le presentamos el rectángulo fraccionado. En el mismo, colorea con un color las cuatro novenas $\left(\frac{4}{9}\right)$ partes del mismo y con otro color la cuarta $\left(\frac{1}{4}\right)$ parte del mismo.



¿En cuántas partes quedó fraccionado el rectángulo? Utilice ese número de partes y escriba, para cada parte representada, una fracción equivalente que tenga el mismo denominador.

$\frac{4}{9} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$

$\frac{1}{4} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$

Compare las fracciones obtenidas. ¿Cuál de las partes representa una mayor porción del rectángulo?

NOTAS

Ahora complete el siguiente cuadro con "<" o ">" según corresponda:

$$\frac{4}{9} \dots\dots\dots \frac{1}{4}$$

y también la expresión equivalente:

$$\frac{4}{9} \dots\dots\dots \frac{25}{100}$$

Le solicitamos que analice cómo comparó estas fracciones y piense cómo podría comparar dos números racionales si no contara con la representación gráfica.

Posiblemente pensó que en primer lugar se deben buscar fracciones equivalentes a las dadas pero de igual denominador, para luego comparar los numeradores de estas fracciones equivalentes y poder comparar las fracciones dadas inicialmente.

b) $-0,751 \dots\dots\dots -0,75$

El razonamiento es muy similar al anterior. Pero cuidado que ambos números son negativos.

Para $-0,751$ y $-0,7$ se compara la parte decimal del orden de los milésimos: $-751 > -755$. Como ambos números son negativos .

c) $\frac{4}{7} \dots\dots\dots \frac{2}{3}$

En este caso se presentan alternativas nuevamente para la comparación: una es calculando la expresión decimal de cada fracción y la otra es comparando las expresiones fraccionarias.

Expresé los números dados en notación decimal y compárelos. Escriba todos los pasos seguidos:

Ahora le proponemos trabajar con las expresiones fraccionarias de dichos números racionales, y trabajar en forma similar a la de la situación a) y comparar los números racionales $\frac{4}{7}$ y $\frac{2}{3}$.

Compare el camino que siguió con el que se le propone a continuación. Recuerde que estos pasos seguidos son una alternativa y no la única. Usted puede seguir otro camino y llegar al mismo resultado final.

Como los denominadores de los números racionales $\frac{4}{7}$ y $\frac{2}{3}$ son distintos, el primer paso es calcular fracciones equivalentes a las dadas pero con la condición que tengan el mismo denominador.

Para determinar cuál es el denominador de las fracciones equivalentes, y que sea el mismo denominador, debe ser un múltiplo común a ambos denominadores; en este caso un múltiplo de 7 y 3.

Por ello, se calcula el múltiplo común menor entre los denominadores dados: $mcm(7, 3) = 21$.

Luego, mediante la amplificación, se construyen fracciones equivalentes a las dadas pero cuyo denominador sea 21.

Obtenga las expresiones fraccionarias equivalentes:

• $\frac{4}{7} = \frac{\dots\dots}{21}$, para ello seguramente pensó en $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{\dots\dots}{21}$

• $\frac{2}{3} = \frac{\dots\dots}{21}$, para ello seguramente pensó en $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{\dots\dots}{21}$

Igualados los denominadores se comparan los numeradores.

Completa la línea de puntos 12 14, resulta $\frac{12}{21} < \frac{14}{21}$.

Por lo tanto, complete según lo concluido con el signo correspondiente "<" o ">".

$\frac{4}{7}$ $\frac{2}{3}$

PENSAR



• Entre dos números positivos es mayor el número de mayor valor absoluto. Es decir, el que está a mayor distancia, hacia la derecha, respecto del cero.

• Entre dos números negativos es mayor el de menor valor absoluto. Es decir, el que está a menor distancia, hacia la izquierda del cero.

• Si dos números tienen distinto signo, es mayor el positivo.

INTERVALOS DE NÚMEROS REALES

ACTIVIDADES



Andrés y Nicolás están realizando una investigación sobre la cantidad de robos que se denuncian durante un mes en una comisaría. Andrés le dice a Nicolás:

- Yo llego a las 16:30, te espero 10 minutos en la esquina de la comisaría, si no llegás en ese intervalo de tiempo entro y te espero en la oficina de recepción de denuncias.

Nicolás llegó a las 16:45 a la esquina. ¿Se encontró con Nicolás?

a) ¿En dónde estaba Andrés cuando llegó Nicolás a la comisaría?

b) Interpretamos esta situación utilizando una recta en la que se representa el tiempo de espera de Andrés en la esquina.



Si se pinta el tiempo de espera transcurrido se obtiene:



El segmento pintado es un **intervalo** (de tiempo).

c) ¿Cuántos minutos esperó Andrés a Nicolás en la oficina?



PENSAR

Los intervalos de números reales están formados por dos números reales distintos y todos los números reales comprendidos entre ambos.

Geoméricamente, se representan por medio de un segmento de la recta numérica o por una semirrecta, y, en algunos casos, con la misma recta numérica.

Tipos de intervalos

a) Intervalos acotados

Geoméricamente se representan por medio de segmentos de la recta numérica o recta real.

- Intervalo cerrado



ACTIVIDADES

1. Para representar un intervalo cerrado siga los siguientes pasos:

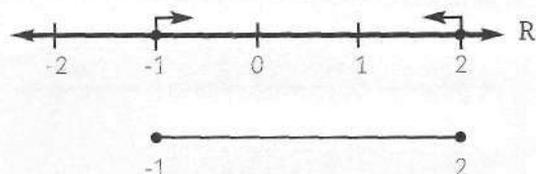
a) Represente sobre la recta numérica los números -1 y 2.



b) Señale con un color todos los puntos correspondientes a los números reales comprendidos entre -1 y 2 y con el mismo color marque también este par de números.



c) Al terminar, seguramente le ha quedado dibujado un segmento de recta como se muestra a continuación. A los números que corresponden a los extremos del segmento se los llama **extremos del intervalo**.



Este intervalo real cerrado se simboliza encerrando los extremos del segmento con corchetes.

$[-1, 2]$ se lee: **intervalo cerrado de extremos -1 y 2**.

A este intervalo pertenecen todos los números reales que son mayores o iguales al número -1 y menores o iguales al número 2. Es decir, pertenecen a él los números reales comprendidos entre -1 y 2 y los extremos que son los números -1 y 2. Por eso se resaltan los extremos con círculos pintados de negro y los puntos comprendidos entre ellos.

- Intervalo abierto

ACTIVIDADES



1. Para representar un intervalo real abierto siga los siguientes pasos:

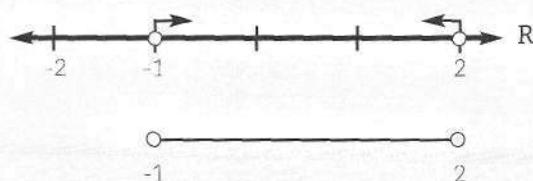
a) Represente sobre la recta numérica los números -1 y 2.



b) Señale con un color todos los puntos correspondientes a los números reales comprendidos entre -1 y 2. En este caso no coloree los puntos -1 y 2.



c) Al finalizar, seguramente ha llegado a un dibujo similar al siguiente.



Este intervalo real abierto se simboliza encerrando los extremos del segmento con paréntesis porque no se consideran los extremos -1 y 2.

$(-1,2)$, se lee: intervalo real abierto de extremos -1 y 2. Este intervalo está formado por todos los números reales mayores al número real -1 y menores que el número real 2. Es decir, pertenecen a él todos los números reales comprendidos entre -1 y 2 y excluye a los extremos que son los números -1 y 2. Por eso se indican los extremos del segmento representado en la recta numérica con circunferencias y se señalan sólo los puntos comprendidos entre ellos.

2. Observe con atención el siguiente intervalo e interprételo simbólicamente. Preste mucha atención a los extremos del mismo.



En este caso al intervalo no pertenece el extremo al que se le asigna el número -1, pero sí pertenece el otro extremo, al cual se le asigna el número 2. Entonces se simboliza: $(-1; 2]$

b) Intervalos no acotados

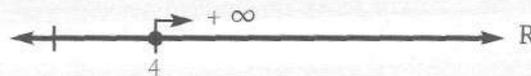
Geoméricamente se representan con semirrectas o con la misma recta real. Recuerde que ∞ , es el símbolo que indica infinito.



ACTIVIDADES

1. Dibuje una recta real o recta numérica y señale con color todos los puntos correspondientes a los números reales que sean mayores o iguales a 4.

Posiblemente su dibujo quedó así:

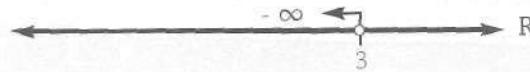


Que simbólicamente se indica: $[4; +\infty)$ y se lee: intervalo cerrado 4 más infinito. A este intervalo pertenecen todos los números reales que son mayores o iguales a 4 y se representa por medio de una semirrecta.

Recuerde que en la recta se muestra sólo una parte de la misma, pero las flechas indican que ésta es infinita.

2. Represente sobre la recta numérica el conjunto de números reales menores que 3.

3. A continuación se muestra la representación para que la compare con la suya. Atención que solamente se pretenden señalar los números reales menores que 3.



Que simbólicamente se indica: $(-\infty, 3)$ y se lee: **intervalo real abierto menos infinito, tres**. A este intervalo pertenecen todos los números reales que son menores que 3 y se representa por medio de una semirrecta.

PENSAR



Dados dos números reales "a" y "b" distintos y $a < b$ se define:	
<p>a) Intervalos acotados:</p> <ul style="list-style-type: none"> • intervalo real cerrado $[a ; b]$ 	<p>b) Intervalos no acotados. Solamente se muestran algunas generalizaciones.</p> <p>$[a ; \infty)$</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Intervalo real abierto $(a ; b)$ 	<p>$[-\infty ; a)$</p>

MÚLTIPLOS Y DIVISORES DE UN NÚMERO NATURAL

ACTIVIDADES



1. Resuelvan las siguientes situaciones:

Situación 1

Juan tiene que cumplir 20 horas de trabajo y las puede cumplir bajo las siguientes condiciones: en uno o más días pero siempre debe cumplir un número entero de horas por día e igual número de horas por cada día. ¿Cuáles son todas las posibilidades de cumplirlas?

Una posibilidad sería trabajar 1 día y cumplir las 20 horas. Otra posibilidad sería trabajar 2 días, pero ¿cuántas horas por día debería trabajar para cumplir las 20 horas en ese tiempo?

Si Juan piensa trabajar 5 días, ¿cuántas horas deberá trabajar cada día?

Si continúan así encontrará todas las posibilidades.

Para responder de manera organizada a esta situación, les proponemos completar la siguiente tabla, en donde en la primer columna aparece el número de días y en la segunda el número de horas que trabajará en cada uno de esos días para, en total, cumplir las 20 horas requeridas.

Número de días a trabajar	Número de horas por día
1	
2	
4	

2. Piensen y respondan:

a) ¿Podría trabajar sólo 3 días, el mismo número de horas cada día y cumplir con las 20 horas? ¿Por qué?

.....

.....

b) ¿Podría trabajar sólo 7 días, el mismo número de horas cada día y cumplir con las 20 horas? ¿Por qué?

.....

.....

Seguramente las respuestas a las dos preguntas anteriores fueron negativas ya que en el primer caso no hay ningún número entero que multiplicado por 3 dé por resultado 20, y para el segundo caso no hay tampoco un número entero que multiplicado por 7 dé por resultado el número 20.

3. Esta situación se debe a que el 20 no es múltiplo de 3 ni de 7, o lo que es equivalente, el 3 y el 7 no son

divisores del número 20. ¿Por qué el 3 no es divisor del número 20?

4. El número 7 tampoco es divisor del número 20 porque no existe un número entero que multiplicado por 7 dé por resultado 20.

a) ¿Cuáles son los divisores de 20?

Si comparan sus respuestas con los números de la tabla que da respuesta a la situación planteada anteriormente, seguramente coinciden. Los números que aparecen en la tabla: 1, 2, 4, 5, 10 y 20 son los divisores o factores naturales del número 20.

b) ¿Qué resto obtienen al dividir el número 20 por cada uno de esos divisores?

Si observan el recuadro podrán también comprobar que $D = d \cdot c + r$.

Por ejemplo: $20 = 4 \cdot 5 + 0$.

Además, como en los casos que estamos analizando el resto (r) es cero, Entonces podemos decir que: si un número " d " es divisor de otro " D " existe un número " c " que multiplicado por " d " da como resultado " D ". Es decir, 4 es divisor de 20 porque existe 5 que multiplicado por 4 da como resultado 20.

Dividendo (D)	Divisor (d)
Resto (r)	Cociente (c)

RECORDAR

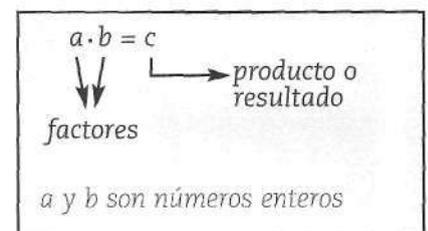


Divisores de un número natural

Un número natural " a " distinto de cero es divisor de otro número natural " b " si existe un número natural " c " que multiplicado por " a " da como resultado el número " b ".

Por ejemplo, los divisores naturales de 6 son: 6, 3, 2, 1.

Justifique por qué dichos números son divisores de 6.



ACTIVIDADES



1. Piensen en todos los productos posibles entre números naturales cuyo resultado sea 24 y escribanlos.

Por ejemplo: $1 \cdot 24 = 24$

$2 \cdot 12 = 24$

Si consideran el conjunto formado por todos los factores de dichos productos se obtiene el conjunto de todos los divisores naturales de 24 y se simboliza:

$$24 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

Se lee: el conjunto de los divisores naturales del número 24 está formado por los números 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24.

Situación 3

Dados los siguiente productos:

$$1 \cdot 6 = 6$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

Lean con atención las siguientes expresiones:

Los números 1, 6, 2 y 3 son los divisores naturales del número 6.

El número 6 es múltiplo del número 1.

El número 6 es múltiplo del número 2.

El número 6 es múltiplo del número 3.

El número 6 es múltiplo del número 6, es decir que es múltiplo de sí mismo.

1. Escriban los elementos que forman el conjunto de divisores naturales de 6.

$$\Delta 6 = \{.....\}$$

Si analizan el camino seguido en las situaciones 1, 2 y 3 para hallar los divisores de un número natural, encontrarán que es conveniente primero hallar todos los productos de factores naturales cuyo resultado sea ese número y luego anotar cada uno de los factores, obteniéndose el conjunto de divisores naturales de dicho número.

Situación 4

1. Observen algunos múltiplos naturales de números naturales:

a) Algunos múltiplos naturales del número 5 son: 0, 5, 10, 15, 20, ...

b) Algunos múltiplos naturales del número 3 son: 0, 3, 6, 9, 12, ...

c) Algunos múltiplos naturales del número 7 son: 0, 7, 14, 21, 28, ...

2. Ahora observen algunos de los productos o resultados de la tabla del 5:

$$a) 5 \cdot 0 = 0$$

$$b) 5 \cdot 1 = 5$$

$$c) 5 \cdot 2 = 10$$

$$d) 5 \cdot 3 = 15$$

3. Comparen los resultados anteriores con los múltiplos naturales del número 5 del punto 1.a) ¿Qué sucede?

.....

4. Ahora escriban algunos de los productos o resultados de la tabla del 3:

.....

.....

5. Comparen los resultados anteriores con los múltiplos naturales del número 3 del punto 1.b) ¿Qué sucede?

.....

.....

Es decir que si se quieren encontrar los múltiplos naturales de un número, hay que escribir los resultados de cada producto de dicho número con otro número natural cualquiera.

También se puede pensar en el conjunto de los múltiplos naturales de 7 y se simboliza:

$$\langle 7 \rangle = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, \dots\}$$

6. Completen los siguientes conjuntos escribiendo algunos de sus elementos:

$$\langle 5 \rangle = \{ \dots \}$$

$$\langle 3 \rangle = \{ \dots \}$$

7. Escriban por lo menos seis múltiplos naturales del número 4.

.....

8. Expliquen brevemente cómo hicieron para obtener dichos múltiplos.

.....

.....

PENSAR



Múltiplos de un número natural. Los múltiplos de un número natural son aquellos números que se obtienen al multiplicar este número por cualquier otro número natural.

ACTIVIDADES



1. A modo de práctica, y teniendo en cuenta los conceptos de divisor y múltiplo de un número natural, le propongo que:

a) Escriba todos los divisores naturales del número 8.

b) Escriba cinco múltiplos naturales del número 6.

NÚMEROS NATURALES PRIMOS Y NÚMEROS NATURALES COMPUESTOS



ACTIVIDADES

1. Completen los siguientes conjuntos de divisores de los números naturales que se indican:

$\Delta 10 = \{ \dots \}$

$\Delta 11 = \{ \dots \}$

$\Delta 1 = \{ \dots \}$

$\Delta 8 = \{ \dots \}$

$\Delta 2 = \{ \dots \}$

2. Observen los conjuntos de divisores que obtuvo. A continuación completen con los números naturales 1, 2, 8, 10 y 11 según corresponda:

a) Los números naturales y tienen sólo dos divisores.

b) Los números naturales y tienen más de dos divisores.

c) El número natural tiene un solo divisor.

NOTAS

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

De acuerdo al análisis realizado, los números naturales que tienen sólo dos divisores -el mismo número y el número uno- son **números primos**. Por ello, los números naturales 2 y 11 son primos. Los números naturales que tienen más de dos divisores, como el número natural 8 y el 10, son números compuestos. Mientras que el número 1 que tiene sólo un divisor no es ni primo ni compuesto.



PENSAR

Números primos: un número natural es primo si sólo tiene dos divisores (él mismo y el número 1).

Números compuestos: un número natural es compuesto si tiene más de dos divisores.

Nota: de acuerdo a la definición de número primo y de número compuesto el número 1 no es un número primo ni compuesto.



ACTIVIDADES

1. Teniendo en cuenta los conceptos de números primos y compuestos:

- a) Encuentre todos los divisores naturales de 17, 5, 4, 9.
- b) Indique de los siguientes números: 17, 5, 4, 9, cuáles son primos y cuáles son compuestos.

Respuestas:

a) $\Delta 17 = \{ 17, 1 \}$; $\Delta 5 = \{ 5, 1 \}$; $\Delta 4 = \{ 4, 2, 1 \}$; $\Delta 9 = \{ 9, 3, 1 \}$

b) Son números primos: 17 y 5. Son números compuestos: 4 y 9

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Existen reglas que facilitan la búsqueda del conjunto de los divisores de un número natural y permiten identificar en forma ágil si un número es o no múltiplo de otro; es decir si es divisible por otro. Estas reglas reciben el nombre de criterios de divisibilidad.

A continuación se muestran los criterios que se utilizan con más frecuencia:



RECORDAR

a) Un número es divisible por 2 si la última cifra es múltiplo de dos, es decir si el número termina en 0, 2, 4, 6 u 8. Por ejemplo: 128 es divisible por 2.

b) Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3. Por ejemplo: 270 es divisible por 3 porque $2 + 7 + 0 = 9$, y 9 es múltiplo de 3.

c) Un número es divisible por 4, si las dos últimas cifras determinan un número que es múltiplo de 4. Por ejemplo 216 es divisible por 4, porque 16 es múltiplo de 4.

d) Un número es divisible por 5 si la última cifra es múltiplo de cinco, es decir el número termina en 0 o 5. Por ejemplo: 250 y 225.

e) Un número es divisible por 6, si es divisible por 2 y 3. Por ejemplo: 336.

f) Un número es divisible por 9, si la suma de sus cifras es múltiplo de 9. Por ejemplo: 198 es divisible por 9 porque $1 + 9 + 8 = 18$ y 18 es múltiplo de 9.

NOTAS

g) Un número es divisible por 10, 100, 1000;..., si termina respectivamente en 0, 00, 000,.... Por ejemplo: 20 es divisible por 10 y 4000 es divisible por 10, por 100 y por 1000.



ACTIVIDADES

1. Dados los siguientes números: 326; 357; 324; 330; 16; 27 y 18:

- a) Escriba los números de la lista que sean múltiplos de 2.
- b) Escriba los números de la lista que sean múltiplos de 5.
- c) Escriba los números de la lista que sean múltiplos de 10.
- d) Escriba los números de la lista que sean múltiplos de 4.
- e) Escriba los números de la lista que sean múltiplos de 9.

Nota.
Si 240 es divisible por 5 también podemos decir que 240 es múltiplo de 5.

NOTAS

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA

Situación 1

Complete las siguientes líneas de puntos con los números naturales primos que faltan para que el producto de dichos números sea igual al número indicado en cada caso:

$6 = 2 \cdot \dots\dots\dots$

$15 = \dots\dots\dots \cdot 5$

$8 = 2 \cdot \dots\dots\dots \cdot \dots\dots\dots$

$27 = \dots\dots\dots \cdot \dots\dots\dots \cdot 3$

Todo número natural compuesto puede expresarse como un producto de números naturales primos y esta expresión es única, independientemente del orden en que se escriban los factores.

Por ejemplo:

$6 = 2 \cdot 3$ observe que 2 y 3 son números naturales primos.

$15 = 3 \cdot 5$ observe que 3 y 5 son números naturales primos.

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ observe que 2 es un número natural primo.

$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ observe que 3 es un número natural primo.

Como puede notar, en cada uno de los ejemplos anteriores, los números naturales 6, 15, 8 y 27 están expresados como un producto de números naturales primos. Cada una de estas

expresiones se denomina factorización del número 6, factorización del número 15, factorización del número 8 y factorización del número 12, respectivamente, y para cada uno de los números esta expresión es única.

A la expresión de un número natural como producto de números naturales primos se la llama forma factorizada o factorización del número.

La factorización de un número natural compuesto se realiza expresando el número a través de multiplicaciones de factores que pueden ser compuestos. Luego a estos factores se los sigue expresando como productos hasta llegar a la expresión en la que todos ellos son números primos.

Por ejemplo, para factorizar el número 36 puede pensarse:

$36 = 4 \cdot 9$, y si observa el número 4 y el número 9 no son primos. Pero puede pensarse al número 4 como $2 \cdot 2$ y ¿podría expresar al número 9 como producto de números naturales primos?, ¿cómo?

Escriba dicho producto en la línea de puntos: $9 = \dots\dots\dots$

Si reemplaza estos datos en la expresión inicial se tiene:

$$36 = 4 \cdot 9$$

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

En la última expresión se repiten dos veces el factor 2 y el factor 3, por lo que la expresión factorizada del número 36 se puede escribir más abreviada así:

$$36 = 2^2 \cdot 3^3$$

RECORDAR



$$3 \cdot 3 = 3^2$$

Si en una multiplicación se repiten los factores se pueden escribir en forma abreviada como una potencia.

3^2 —→ Exponente: indica el número de veces que se repite un mismo factor.
 ↓
 Base: indica el factor que se repite.

Pero a veces cuando el número a factorizar es tal que no resulta sencillo pensar en el producto de dos números que den por

NOTAS

resultado dicho número y esta forma de factorización resulta ser poco práctica, es posible también factorizar ese número natural haciendo reiteradas divisiones cuyos divisores sean números primos.

A continuación se muestra la factorización de 84 indicando los respectivos pasos. Usted puede completar donde se le indique

84
.....	2
.....	3
7	7
1

1° Identifique el menor número primo que divide a 84. En este caso es el número y escríbalo a la derecha del número 84.

Realice mentalmente la división $84 : 2$ y escriba el cociente o resultado que es el número, debajo del 84.

2° Identifique el menor número primo que divide a 42, en este caso también es 2, y escríbalo a la derecha del mismo.

Realice mentalmente la división $42 : 2$ y escriba el cociente o resultado -que es el número - debajo del 42.

3° Identifique el menor número primo que divide a 21 -que es 3- y escríbalo a la derecha del número 21.

Realice mentalmente la división $21 : 3$ y escriba el cociente - que es el número - debajo del 21.

4° Identifique el menor número primo que divide a 7 -es el mismo número 7- y escríbalo a la derecha del número 7. Si realiza mentalmente el cociente $7 : 7$ obtiene el cociente 1, que se escribe debajo del número 7 (de la izquierda).

Como se llega a cociente 1 se concluye la factorización y se expresa así: $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$. También se puede expresar así:

$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

Los pasos indicados anteriormente para factorizar el número 84 se emplean para la factorización de cualquier número natural.



ACTIVIDADES

1) Escriba como potencia el siguiente producto:

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$

b) $2 \cdot 2 \cdot 2 =$

2) Factorice empleando los productos de factores primos de los números 18 y 30.

Dejar espacio equivalente a cinco líneas

3) Factorice a través de los cocientes reiterados del número 252.

Respuestas:

1. $3^5; 2^3$

2. $18 = 2 \cdot 3^2; 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

3. $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

DIVISOR COMÚN MAYOR (D.C.M.) DE DOS O MÁS NÚMEROS NATURALES



ACTIVIDADES

Situación 1

1) Encuentren todos los divisores naturales de 8, 12 y 20.

$$\Delta 8 = \{ \dots \}$$

$$\Delta 12 = \{ \dots \}$$

$$\Delta 20 = \{ \dots \}$$

2) De todos los divisores marquen aquellos que sean comunes a 8, 12 y 20; es decir aquellos que sean divisores de 8, 12 y 20 a la vez.

3) De esos divisores señalados escriban, en el recuadro, el mayor de ellos:

El número que obtuvieron recibe el nombre de divisor común mayor de 8, 12 y 20 y en este caso es el número cuatro. Si obtuvieron otro valor vuelvan y realicen los puntos a, b y c nuevamente.

Se escribe $d.c.m.(8, 12, 20) = 4$ y se lee: el divisor común mayor a 8, 12 y 20 es igual a 4.

PENSAR



El divisor común mayor de dos o más números naturales es el mayor de los divisores comunes a los números dados.



Situación 2

Para encontrar el d.c.m. (30, 50) se procede como antes se detalló:

1) Hay que encontrar todos los divisores naturales de 30 y 50, como se muestra a continuación:

$$\Delta 30 = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

$$\Delta 50 = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$$

2. De todos los divisores identifiquen aquellos que sean comunes a 30 y 50. Coincidirán en que, en este caso, son el 1, 2, 5 y 10.

3. De esos divisores identificados, escriban en el cuadro el mayor de ellos:

4. Luego completen: d.c.m. (30, 50) =

NOTAS

El procedimiento empleado anteriormente para encontrar el d.c.m. es poco práctico cuando se trata de muchos números. Por eso existe esta otra forma de hacerlo que se muestra a continuación.

Por ejemplo, si se quiere el divisor común mayor a 30, 15 y 20 se procede de la siguiente manera:

1° Se factorizan los números dados, por ejemplo a través de los cocientes reiterados como se muestra a la izquierda.

2° Se escribe cada número como producto de factores primos como se muestra a continuación:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot \underline{5} \qquad 15 = 3 \cdot \underline{5} \qquad 20 = \underline{5} \cdot 2^2$$

Nota: En este caso el factor común que aparece en las tres factorizaciones es el 5.

3° Se identifican los factores primos comunes con el menor exponente. En este caso observen las expresiones factorizadas de los números 30, 15 y 20 y respondan cuál es el factor común a 30, 15 y 20.

¿Cuál es el mayor exponente con que aparece el factor común "5" en las expresiones factorizadas de los números 30, 15 y 20?

4° El divisor común mayor es igual al producto de los factores primos que son comunes elevados al menor exponente. En este ejemplo hay un sólo factor común primo y con el menor

exponente que es 5.

$$\text{Entonces d.c.m. (30, 15, 20) = 5}$$

5° Verifiquen si realmente 5 es divisor de cada uno de los números dados. Para ello piensen si existe un número que multiplicado por el divisor común mayor (5) dé como resultado 30, 15 y 20 respectivamente.

Analicen el siguiente ejemplo:

Si se quiere encontrar el d.c.m. (36, 12 y 18), se debe proceder de manera similar:

1° Escriban cada número como producto de sus factores primos, es decir factoricen los números 36, 12 y 18 utilizando alguna de las dos formas de factorizar abordadas anteriormente (como producto o como cocientes reiterados).

2° Al escribir la expresión factorizada de cada número seguramente obtuvieron:

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2 \quad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 \quad 18 = 3^2 \cdot 2$$

3° Observen y respondan: ¿Cuál o cuáles son los factores comunes a los tres números?

.....

Si bien los factores comunes a los tres números son el número 2 y el número 3, hay que considerarlos con el menor exponente.

4° Si realizan el producto de los factores primos comunes con el menor exponente (si hay más de un factor) obtendrán el divisor común mayor de los números 36, 12 y 18.

¿Cuál es número que cumple con la condición de ser el divisor común mayor de dichos números? Escribanlo:

.....

5° Si el número que usted obtuvo fue 6, lo resolvió correctamente. En caso contrario revisen cada uno de los pasos anteriores.

NOTAS

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ACTIVIDADES

1. Encuentren el **divisor común mayor** de los números 35, 14 y 42, es decir, el **d.c.m.** (35, 14, 42) y verifiquen si el resultado es correcto.



Respuestas:

1. 3^5 ; 2^3

2. $18 = 2 \cdot 3^2$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

3. $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

MÚLTIPLO COMÚN MENOR (M.C.M.)



ACTIVIDADES

1. Escriban los primeros cinco múltiplos, distintos de cero, de cada uno de los siguientes números:

a) Los múltiplos del número 4 son:

b) Los múltiplos del número 10 son:

c) Los múltiplos del número 5 son:

Observen los múltiplos que escribió en cada caso y señalen aquellos números que sean múltiplos comunes a los tres números, es decir, múltiplo de 4 y a la vez de 10 y de 5.

2. Si obtuvieron un único número o bien más de un número elijan el menor de ellos y escríbanlo en el cuadro:

Ese número que obtuvieron es un múltiplo común a 4, a 10 y a 5, pero además es el menor de los múltiplos comunes. Por ello se dice que el número 20 es el múltiplo común menor de los números 4, 10 y 5. Se escribe: $m.c.m. (4, 10, 5) = 20$ y se lee: "el múltiplo común menor de los números 4, 10 y 5, es igual al número 20".



PENSAR

El múltiplo común menor de dos o más números naturales es el menor de los múltiplos comunes a dichos números.



ACTIVIDADES

1. Encuentren el $m.c.m (3, 4, 7)$ siguiendo los pasos antes indicados.

Respuesta:

1. 84

Como en el caso del cálculo de divisor común mayor (d.c.m.) también hay un modo más práctico para calcular el múltiplo común menor (m.c.m.), que se emplea cuando no es tan sencillo encontrar los múltiplos de cada número, luego identificar los comunes y de éstos seleccionar el menor.

ACTIVIDADES



Siga los pasos indicados a continuación para encontrar el m.c.m (12, 30, 9):

1. Factorice cada uno de los números dados aplicando el procedimiento que usted prefiera.

2. Escriba cada número factorizado:

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$30 = 3 \cdot 5 \cdot 2$$

$$9 = 3^2$$

3. Identifique los factores primos comunes con el mayor exponente. En este caso hay un sólo factor común: el número 3. Escríbalo con el mayor exponente: 3^{\dots} . Por otro lado identifique los factores no comunes con el mayor exponente. En este caso hay dos factores no comunes que son el número 2 y el número 5. Escríbalos con el mayor exponente con que aparecen en la factorización: 2^{\dots} y 5.

4. Calcule el producto entre los factores primos comunes y los factores primos no comunes con el mayor exponente, es decir el producto: $3^2 \cdot 2^2 \cdot 5$. ¿Qué número obtiene al realizar el cálculo indicado?

El número que encontró es el múltiplo común menor de los números 12, 30 y 9, y puede escribirse así:

$$\text{m.c.m.}(12, 30, 9) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$

Finalmente verifique si el número encontrado es múltiplo de los números dados. Al efectuar la división de 180 por cada uno de ellos, el cociente debe ser un número natural y el resto debe ser igual a cero.

5. Encuentre el múltiplo común menor de los números 15, 20 y 3, es decir el m.c.m. (15, 20, 3).

CÁLCULOS CON NÚMEROS RACIONALES BAJO DISTINTAS NOTACIONES (FRACCIONARIA Y DECIMAL). PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES



ACTIVIDADES

1. Antes de iniciarnos en los cálculos con números racionales es conveniente que recuerde algunos conocimientos que usted ya tiene. Para ello responda:

a) ¿Qué es un número racional?

.....

.....

b) ¿De qué formas se puede expresar un número racional?

.....

.....

c) ¿Cuándo dos fracciones son equivalentes?

.....

.....

d) ¿Cómo obtiene una fracción equivalente a un número dado, por ejemplo a $\frac{8}{14}$?

.....

.....

.....

e) ¿Qué significado tiene el arco que aparece en la expresión decimal de un número racional, por ejemplo: $1,\overline{5}$?

.....

.....

Si pudo responder a estas preguntas continúe, si tuvo dificultades le recomendamos que revea el tema "conjunto de números racionales" antes de seguir avanzando.

Es importante considerar la siguiente observación:

A partir de este momento hablaremos de **operaciones en el conjunto de los números racionales**.

Por ello es necesario que usted sepa que nos referiremos a **operación** en un conjunto numérico cuando se cumple que el resultado del cálculo entre dos números de ese conjunto siempre es un número que pertenece al mismo conjunto.

Si esto no se cumple hablaremos simplemente de **cálculos posibles** en un conjunto numérico.

Por ejemplo; como al sumar dos números racionales siempre se obtiene un número racional, decimos que la adición es una operación en el conjunto de los números racionales.

Como al restar dos números racionales siempre se obtiene otro número racional, la sustracción es una operación en el conjunto de los números racionales.

También son operaciones en el conjunto de los números racionales la multiplicación y división.

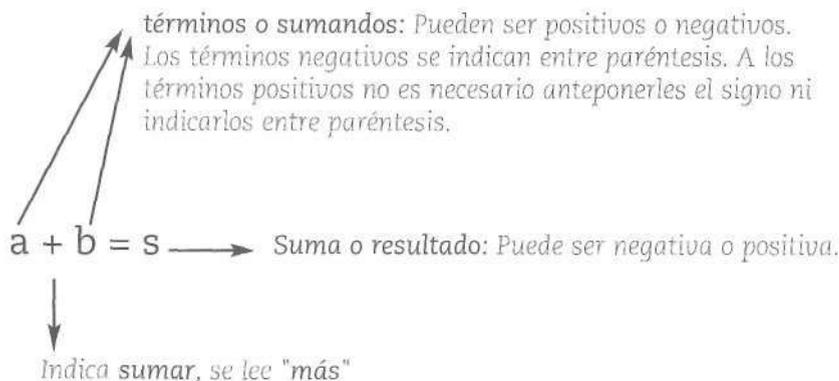
De cada una de estas operaciones analizaremos los cálculos correspondientes y las propiedades que cada una de ellas cumple. Propiedades que luego serán empleadas para resolver ecuaciones.

SUMA DE NÚMEROS RACIONALES

RECORDAR



Recuerde los nombres que se muestran a continuación. Considere que a , b y s son números racionales.



NOTAS

NOTAS

Lea las siguientes situaciones y vaya respondiendo según se le solicite.

Situación 1

Martín ha realizado dos extracciones de su cuenta bancaria de \$120,50 y \$75,80.

a) ¿Cuál es el monto total de las extracciones realizadas?

Al solicitar el resumen de cuenta se indican las cantidades referidas a las extracciones y al monto total de las mismas con un signo negativo.

b) ¿Por qué cree usted que es necesario indicar estas cantidades con un signo negativo?

Para que compare con su resultado, a continuación se muestra la situación resuelta.

A través de la lectura del punto (a) puede considerarse que la acción que se debe realizar para resolver la situación es la de "reunir" las cantidades de dinero que corresponden a las dos extracciones realizadas. De manera que, aritméticamente, ¿qué cálculo haría para resolver la situación?

Coincidirá que se suman las medidas (números) de dichas cantidades para resolver la situación. Así el cálculo correspondiente es:

$$-120,50 + (-75,80) = -196,30$$

Note que es necesario anteponer el signo negativo a 120,50, a 75,80 y al saldo de 196,30 para diferenciarlas de las cantidades que indican depósitos en la cuenta o saldos a favor, que se indican en ambos casos con un signo positivo.

Situación 2

Suponga que usted gasta las $\frac{2}{4}$ partes de su sueldo en pagar impuestos y una cuarta parte del mismo en pagar el alquiler. ¿Qué parte de su sueldo ha gastado? Escriba el cálculo que resuelve esta situación.

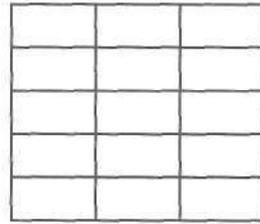
NOTAS

tienen distinto denominador.

La suma es $\frac{3}{5} + \frac{1}{3} =$

Le proponemos resolver gráficamente la situación planteada y verificar de esta manera si el resultado obtenido por usted coincide con el que se obtiene a partir de la representación gráfica de la situación y que representa la parte del total de la longitud del cable tendido.

c) Marque, en la siguiente representación, con color las $\frac{3}{5}$ partes de la longitud del cable correspondiente a la parte instalada el primer día y luego $\frac{1}{3}$ parte correspondiente al segundo día.



Observando el gráfico responda:

d) ¿En cuántas partes quedó fraccionado el rectángulo que representa la longitud total del cable a instalar?

e) Utilice ese número de partes y escriba, para cada parte representada, una fracción equivalente que tenga el mismo denominador:

$\frac{3}{5} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

$\frac{1}{3} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

El denominador de las fracciones equivalentes obtenidas ¿es un múltiplo de 5?

Y es también, como podrá verificar, un múltiplo del número 3. Por lo tanto, es un múltiplo común a los denominadores 3 y 5. Pero ¿qué múltiplo común es? Para responder a la pregunta escriba algunos múltiplos de 3 y algunos de 5 y determine cuáles son los comunes.

Como usted ya sabe 15 es el múltiplo común menor (m.c.m.) de los denominadores 5 y 3.

Utilice las fracciones equivalentes obtenidas y escriba la suma de los números racionales dados ($\frac{3}{5} + \frac{1}{3}$) como una suma de

sumandos equivalentes a los mismos, pero con igual denominador.

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} = \frac{14}{15}$$

Finalmente se puede expresar que: *se han tendido las $\frac{14}{15}$ del total de la longitud del cable.*

El resultado obtenido debería coincidir con el encontrado por usted al inicio de la situación. Verifique que así sea. En caso de no coincidir revise los pasos seguidos.

Es importante que interprete que la representación gráfica que hemos utilizado para resolver juntos la situación planteada, es uno de los caminos posibles que le permitirán resolver situaciones que impliquen sumas de números racionales expresados con fracciones de distinto denominador.

Otro camino, si no recurre a la representación gráfica, es seguir los siguientes pasos que no son otra cosa que la sistematización de los que usted siguió para resolver la situación planteada. Lea cada paso que se propone y compárelo con los seguidos anteriormente.

Para resolver el cálculo: $\frac{3}{5} + \frac{1}{3} =$

Es necesario escribir dicha suma como suma de fracciones equivalentes a las dadas y de igual denominador. Ese denominador es el m.c.m. de los denominadores 3 y 5, por lo que se necesita:

1º) Calcular el m.c.m. (5, 3) y se obtiene 15.

2º) Encontrar las fracciones equivalentes a $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{3}$ con denominador 15, mediante la amplificación:

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{15} \text{ (se ha multiplicado por 3 el numerador y de denominador de } \frac{3}{5} \text{ para obtener } \frac{9}{15} \text{)}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15} \text{ (al multiplicar numerador y denominador por 5).}$$

3º) Reemplazando los términos de la suma inicial por sus respectivas fracciones equivalentes que tienen el mismo denominador resulta:

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{9}{15} + \frac{5}{15}$$

4º) Se resuelve obteniéndose $\frac{14}{15}$.

Situación 4

1. A las 3 de la madrugada la temperatura es de $5,8^{\circ}\text{C}$ y al cabo de 3 horas ha descendido $10,5^{\circ}\text{C}$.

¿Cuál es la medida de la temperatura a las 6 de la mañana?

NOTAS

NOTAS

2) Si desde las 6 de la mañana hasta las 12 la temperatura ha aumentado $7,6^{\circ}\text{C}$. ¿Cuál es la medida de la temperatura a las 12?

Para que compare con su resultado, a continuación se muestra la situación resuelta.

Al realizar el análisis del punto 1, el cálculo que le permite determinar la temperatura a las 6 de la mañana es:

$$+5,8 - 10,5 = -4,7 \text{ (la temperatura es de } 4,7^{\circ}\text{C bajo cero).}$$

En el punto 2, el cálculo para encontrar la medida de la cantidad de temperatura a las 12 es:

$$-4,7 + 7,6 = +2,9 \text{ (la temperatura a las 12 es de } 2,9^{\circ}\text{C sobre cero).}$$

Situación 5

Tres amigos se juntan a comer un asado el viernes a la noche. Para la ocasión han comprado tres cuarto kg. de entraña y 1 kg. de asado de carnicero. Pero se agrega un amigo más, que trae 1,560 kg. de vacío. ¿Cuántos kilos de asado hay?

Comenzará leyendo nuevamente el problema para responder:

¿Qué pide el problema?

Para encontrar la cantidad de carne de asado que hay: ¿qué haría con las cantidades que aparecen en la situación? Posiblemente, para responder esta cuestión usted ha pensado en juntar las cantidades de carne compradas y agregar la cantidad que trae el amigo que llega más tarde. Estas acciones de juntar y agregar están vinculadas al cálculo aritmético de suma.

¿Cuál es el cálculo que resuelve la situación?

Si observa cada uno de los términos de la suma verá que se

desea sumar tres números racionales, uno expresado en notación fraccionaria y dos en notación decimal. En casos como estos, donde hay distintas expresiones de un número racional, es conveniente expresar a todos los términos de una misma forma, por ejemplo expresar $\frac{3}{4}$ en notación decimal.

Para ello se calcula el cociente $3 : 4$ y se obtiene: $\frac{3}{4} = 0,75$

Volviendo a la suma inicial puede expresarse con todos los términos en notación decimal.

Escriba la suma que resulta y su resultado:

..... + + =

Entonces la respuesta es: **se tienen 3,31 kg. de asado.**

NOTAS

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ACTIVIDADES



Usted recordará que al calcular el cociente entre dos números enteros no siempre se obtiene una expresión decimal exacta. Surge entonces la pregunta: ¿Cómo resolvemos el siguiente cálculo?

$$\frac{2}{11} + \frac{3}{4}$$

1. Resuelva la suma indicada utilizando los números racionales escritos de forma fraccionaria:

Verifique que el resultado que obtuvo sea $\frac{41}{44}$.

2. Pero también puede resolver utilizando la escritura decimal de cada uno de los números racionales expresados en forma fraccionaria. Para lo cual:

a) Expresé cada uno de los números racionales, $\frac{2}{11}$ y $\frac{3}{4}$, en forma decimal.

$$\frac{2}{11} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{3}{4} = \dots\dots\dots$$

b) Escriba ahora la suma con los sumandos expresados en forma decimal:

..... + =

c) Resuélvala.

Posiblemente al querer calcular la suma $0,\widehat{18} + 0,75 = \dots\dots\dots$ tomó la decisión de resolverla utilizando dos cifras decimales y obtuvo así el número racional 0,93, número que obtuvo de sumar las cifras de los centésimos de ambos números con las cifras de los décimos de ambos números.

Pero si considera que el primer sumando $0,\overline{18}$ es un número que tiene infinitas cifras decimales periódicas, ¿podrían considerarse al resolver la suma indicada más de dos cifras?

Por ello para calcular la suma, cuando hay números racionales que tienen infinitas cifras decimales periódicas hay que acordar cuántas cifras decimales se van a utilizar. Por ejemplo:

- Una cifra decimal:

$$0,1 + 0,7 = 0,8$$

Entonces es $\frac{2}{11} + \frac{3}{4} \cong 0,8$

Nota: se lee: dos onceavos más tres cuartos es aproximadamente igual a ocho décimos.

- Tres cifras decimales:

$$0,181 + 0,750 \cong 0,931$$

NOTAS

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Al observar las sumas obtenidas, cuando se consideran una o tres cifras decimales, vemos que los resultados obtenidos son números racionales que **no son iguales** ya que $0,8 < 0,931$.

El análisis que hemos realizado nos permite concluir que en las situaciones de suma de números racionales como ésta última, donde hay un sumando que es un número racional con escritura decimal periódica, hay dos posibilidades de resolución:

- si se resuelve utilizando los sumandos expresados en forma fraccionaria se obtiene un número racional que es el resultado exacto,
- pero si se resuelve utilizando los sumandos expresados en forma decimal, hay que decidir con cuántas cifras decimales se trabajará y el resultado que se obtiene siempre resulta un valor aproximado al resultado exacto.



PENSAR

Al sumar dos o más números racionales deben tenerse en cuenta las siguientes consideraciones:

- Si los sumandos son números racionales que tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos y se coloca el signo de los mismos.

• Si los sumandos son números racionales que tienen distinto signo, se restan sus valores absolutos y se coloca el signo del sumando de mayor valor absoluto.

• Si se suman números racionales expresados en forma decimal, al sumar se debe tener la precaución de sumar siempre las cifras correspondientes a un mismo orden decimal (es decir considerar centésimos con centésimos; décimos con décimos).

• Si se suman números racionales expresados en forma de fracciones de igual denominador, la suma es una fracción que tiene el mismo denominador y el numerador es la suma de los numeradores de los sumandos dados.

• Si se suman números racionales expresados en forma de fracciones de distinto denominador, se debe expresar dicha suma como una suma de fracciones equivalentes a las dadas que tienen como denominador el menor múltiplo común de los denominadores dados.

A continuación le proponemos una serie de ejercicios que le permitirán poner en juego lo último que hemos analizado. Si tiene dificultades para llegar a los resultados le sugerimos que revea los distintos apartados para poder resolverlos.

NOTAS

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ACTIVIDADES



1) Un almacenero de barrio revisa su libreta con los vecinos a los que les fía, para hacer un balance. Cada compra que ha fiado la marca con un signo "-" y cada pago que recibe con un signo "+". Indiquen para cada cliente cuánto debe o cuánto tiene de crédito.

Marcelo	María	Jorge	Ema	Raquel
-19,5	-9,86	-16,3	-8,15	-2,37
+20	-10,5	-2,75	-13,64	-6,12
-5,45	+20	-6,84	+19,85	-1,25
-3,1		+25,5		+9,25

2) Un chapista ha trabajado 4 días en el arreglo de un vehículo y ha realizado $\frac{3}{14}$ partes del trabajo el 1° día, $\frac{2}{14}$ el 2° día, $\frac{3}{14}$ el 3° día y $\frac{4}{14}$ el último. ¿Qué parte del trabajo total ha realizado?

3) Se ha recolectado pintura para pintar una oficina y se cuenta con cuatro latas que contienen: $\frac{1}{2}$ litro, $\frac{3}{4}$ litro, $\frac{2}{3}$ litro y $\frac{4}{5}$ litro de pintura respectivamente. ¿Qué cantidad de pintura se tiene para pintar la oficina?

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES



ACTIVIDADES

Realicen las siguientes actividades con el objeto de analizar las propiedades de la adición en el conjunto de los números racionales.

Al finalizar el análisis observarán que las propiedades se enuncian en lenguaje corriente y simbólicamente para su generalización.

1. Calculen las siguientes sumas:

a) $4,5 + \frac{3}{4} = \dots\dots\dots$ b) $-\frac{7}{4} + (-5) = \dots\dots\dots$ c) $\frac{5}{3} + \frac{7}{6} \dots\dots\dots$ d) $5 + (-15) = \dots\dots$

2. Observen cada uno de los resultados que obtuvieron en las sumas anteriores: estos números ¿son racionales? ¿Por qué?

.....

.....

3. Verifiquen que los resultados de las sumas sean respectivamente, $-3,75$; $-6,75$; $\frac{17}{6}$; -10 , que son todos números racionales.

NOTAS

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

De esta forma se pueden seguir sumando pares de números racionales y **la suma siempre será un único número racional**. Esta característica de la adición en el conjunto de los números racionales \mathbb{R} , se llama **ley de cierre**.



PENSAR

Ley de cierre

La suma de dos números racionales es única y siempre es un número racional.

1. En esta actividad aparecerán símbolos matemáticos, como los corchete [], llaves { }, que indican el orden en que se realiza el cálculo. Resuelvan este cálculo que tiene más de dos términos o sumandos:

$1,4 + (-0,5) + 3 = \dots\dots\dots$

Al hacerlo probablemente resolvieron: $1,4 + (-0,5) = 0,9$

NOTAS

Y luego sumaron: $0,9 + 3 = 3,9$

Al interpretar este razonamiento simbólicamente se tiene:

$$\{[1,4 + (-0,5)] + 3,9\} = 4,8$$

Los corchetes indican la primera suma que se efectúa.

Las llaves indican que a la primera suma, le debe sumar 3,9 cuyo resultado es 4,8.

Este mismo cálculo también lo pueden razonar de este modo.

$$\{1,4 + [-0,5 + 3,9]\} = 4,8$$

Los corchetes indican la primera suma que usted efectúa. El resultado es 3,4.

Las llaves indican que a la primera suma, le debe sumar 1,4 cuyo resultado es 4,8.

Podemos concluir que:

$$\{[1,4 + (-0,5)] + 3,9\} = \{1,4 + [-0,5 + 3,9]\}$$

En síntesis, notarán que en ambos casos se asociaron primero dos términos para finalmente, al resultado, sumarle el tercer término. El orden en que se asocian los términos no altera el resultado final del cálculo. Esta propiedad de la adición se llama asociativa.

PENSAR



Propiedad asociativa

Para todos los números racionales a, b, c se verifica que:

$$a + b + c = (a + b) + c = (a + b) + c.$$

2. Analicen y calculen:

$$-\frac{7}{2} + \left(\frac{0}{2}\right) = \left(\frac{0}{2}\right) + \left(-\frac{7}{2}\right) = \dots\dots\dots$$

$$3,2 + 0 = 0 + 3,2 = \dots\dots\dots$$

NOTAS

Nota: recuerden que 0 puede expresarse de las siguientes formas:

$$\frac{0}{2} = \frac{0}{5} = \frac{0}{1}$$

El resultado que ustedes han obtenido seguramente es $(-\frac{7}{2})$ en un caso, y 3,2 en el otro.

Notarán que: si el cero se suma a la izquierda o derecha de un número racional se obtiene el mismo número racional. Esta característica se cumple porque el número racional 0 es el elemento neutro de la adición en \mathbb{R} .



PENSAR

Propiedad del elemento neutro

Existe el cero de \mathbb{R} , tal que para todo número racional se verifica que: $a + 0 = 0 + a = a$

3. Analicen y calculen:

a) $\frac{1}{5} + (-\frac{1}{5}) = \dots\dots\dots$

b) $(-\frac{1}{5}) + \frac{1}{5} = \dots\dots\dots$

c) $2, 3 + (-2, 3) = \dots\dots\dots$

d) $(-2,3) + 2,3 = \dots\dots\dots$

a) ¿Qué ocurre con el resultado obtenido en los cuatro cálculos propuestos?

Ahora observen cada cálculo y los sumandos. Resultan ser números de igual valor absoluto pero con distinto signo. ¿Qué nombre reciben los números que tienen esta característica?

En síntesis, en cada uno de los cálculos los sumados son números racionales opuestos y el resultado es cero (0) que, como antes vimos, es el elemento neutro de la adición en el conjunto de los números racionales.

Podemos concluir que: si a un número racional, distinto de cero, se le suma su opuesto la suma es cero.

PENSAR



Propiedad del elemento opuesto o inverso aditivo

Para todo número racional "a", distinto de cero, existe el racional (-a) tal que: $a + (-a) = -a + a = 0$

4. Resuelvan y completen

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \dots\dots\dots \\ \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \dots\dots\dots \end{array} \right\} \frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{7}{4} + \frac{3}{4}$$

Como habrán podido observar, el orden en que se sumen los términos no altera la suma. Por ello el resultado coincide en ambos casos. Este ejemplo corresponde a la propiedad conmutativa.

PENSAR



Propiedad conmutativa

Para todos los números racionales se verifica que: $a + b = b + a$

5. Analicen y completen la siguiente igualdad y observen los nombres que aparecen.

$$\underbrace{1,5 + 0,2}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{1,6 + 0,1}_{\text{Segundo miembro}}$$

El signo igual (=) separa los dos miembros de la igualdad dada.

Para comenzar, se verificará si la expresión es realmente una igualdad.

a) Completen: $1,5 + 0,2 = \dots\dots\dots$ y $1,6 + 0,1 = \dots\dots\dots$

Seguramente, en ambos cálculos obtuvieron la suma 1,7.

Entonces es:

$$\underbrace{1,5 + 0,2}_{1,7} = \underbrace{1,6 + 0,1}_{1,7}$$

Es decir que se realiza el cálculo en ambos miembros y luego se comparan los resultados obtenidos.

NOTAS

- Si suman ambos miembros (-0,5), la expresión que resulta es:

Realicen el cálculo indicado en cada miembro. Para ello tengan presente la propiedad asociativa.

$$\begin{array}{rcc}
 \text{Primer miembro} & & \text{Segundo miembro} \\
 \hline
 1,5 + 0,2 + (-0,5) & = & 1,6 + 0,1 + (-0,5) \\
 1,7 + (-0,5) & = & 1,7 + (-0,5) \\
 1,2 & = & 1,2
 \end{array}$$

Observarán que la igualdad se mantiene debido a que se sumó el mismo número en cada uno de los miembros. Es decir que si a ambos miembros de la igualdad se le suma un mismo número racional se mantiene la igualdad. Esta característica de la adición recibe el nombre de propiedad uniforme.



PENSAR

Propiedad uniforme

Para todos los números racionales a, b, c ; si $a = b$ entonces $a + c = b + c$.

La siguiente propiedad, que está muy vinculada a la anterior, se refiere a la cancelación de sumandos o términos iguales en distintos miembros.

Si un mismo término aparece en ambos miembros de una igualdad puede ser cancelado conservando la igualdad.

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} + (-0,13) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + (-0,13)$$

$$\frac{3}{4} + \cancel{(-0,13)} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \cancel{(-0,13)}$$

Resulta:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}$$



PENSAR

Propiedad cancelativa

Para todos los números racionales a, b, c , si $a + c = b + c$ entonces $a = b$



ACTIVIDADES

1) Relea las propiedades con atención, analice los ejemplos, proponga también usted otros y finalmente, trate de recordarlas.

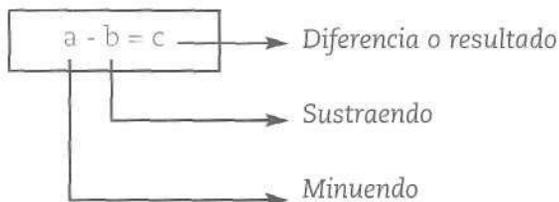
2) A continuación le proponemos un cálculo. Resuélvalo aplicando propiedades.

$$0,5 + \left(-\frac{5}{2}\right) + 0,5 + 7 - 0 + \frac{5}{2} =$$

Respuesta: 8

RESTA DE NÚMEROS RACIONALES

Considere que a, b y c son números racionales y observe el nombre que recibe cada uno de ellos:



Recuerde que: la resta de números racionales también se puede expresar como una suma: $a - b = a + (-b)$

Situación 1

La pileta de una bodega, que está a 30 km. de Mendoza, tiene ocupada solamente las tres cuartas partes de su capacidad con vino fino y se ha extraído la cuarta parte de la capacidad de la misma para el llenado de botellas. ¿Qué parte queda de la capacidad de la pileta para el próximo llenado?

Antes de comenzar a resolver esta situación le sugerimos que lea nuevamente con atención el problema, subraye los datos del mismo y luego responda las siguientes preguntas.

NOTAS

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

NOTAS

a) La distancia a la que está la bodega, ¿influye para responder la pregunta de esta situación?

.....

.....

.....

b) ¿La pileta está total o parcialmente llena?

.....

.....

c) ¿Qué parte de su capacidad tiene con vino?

.....

.....

.....

d) ¿Qué parte de la capacidad de la pileta se extrae?

.....

.....

e) Para saber qué parte de la capacidad de la pileta queda para el próximo llenado, ¿qué haría con las partes ($\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$) que aparecen en la situación?

.....

.....

.....

f) ¿Qué cálculo debería hacerse para resolver el problema?

.....

.....

g) Ahora, resuelva el cálculo y escriba la respuesta de la situación.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

En concreto, la distancia a la que está la bodega no es un dato a considerar para resolver la situación planteada. La pileta de la bodega está parcialmente llena, ya que se expresa: "tiene solamente las tres cuartas de su capacidad" total.

Para resolver esta situación, seguramente pensó en sacar una cuarta parte de la capacidad total de la pileta a las tres cuartas partes de la capacidad total de la pileta. De esta forma la parte que quede será la correspondiente a la respuesta del problema. Finalmente, la acción de extraer o de sacar está vinculada al cálculo de una resta; en este caso:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \dots\dots\dots$$

Pues bien, para resolver este cálculo se procede como en la suma de números racionales expresados en forma fraccionaria, con igual denominador.

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

¿La respuesta del cálculo es un número racional posible de simplificar?

¿Qué divisor común tienen el número 2 (numerador) y el número 4 (denominador)?

Simplifique dicha expresión fraccionaria, dividiendo numerador y denominador por el divisor común, en este caso por el número dos.

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \dots\dots\dots$$

Entonces le queda la mitad $\left(\frac{1}{2}\right)$ de la capacidad de la pileta con vino fino para el próximo llenado.

SUPRESIÓN DE PARÉNTESIS (), CORCHETES [] Y LLAVES { }

Recuerde que al abordar la propiedad asociativa de la adición en el conjunto de los números racionales se utilizaron paréntesis, corchetes y llaves para indicar cómo se realizó el cálculo.

Ahora se proponen cálculos en los que aparecen paréntesis, corchetes y llaves que habrá que ir eliminando o resolviendo, según corresponda, para calcular el resultado. Para resolverlos se presentarán dos propuestas; pero hay aspectos a considerar que le son comunes a ambas.

1º Se resuelven o eliminan primero los paréntesis, luego los corchetes y finalmente las llaves.

2º Si un paréntesis, corchete o llave está precedido por un signo negativo, al suprimirlo cambia el signo de el o los términos que encierra.

3º Si un paréntesis, corchete o llave está precedido por un signo positivo, al suprimirlos no cambia el signo del o los términos que encierra.

A continuación se muestran dos alternativas para resolver un cálculo en el que aparecen paréntesis, corchete y llaves. El cálculo a resolver es:

NOTAS

NOTAS

$$\frac{16}{4} - \{ -0,3 + [-1,5 - 8,5 - (-0,5 + 1)] - \frac{9}{3} \} =$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Una de las alternativas que usted tiene es:

Resolver los paréntesis en primer lugar, colocando el resultado sin el paréntesis, luego, de la misma forma, suprime los corchetes y finalmente las llaves, en ese orden.

Otra alternativa que usted puede utilizar es suprimir o eliminar los paréntesis, corchetes y llaves en ese orden, pero sin resolver el o los cálculos que encierran hasta el final (considerando los aspectos 2 y 3 antes enunciados).



ACTIVIDADES

1. Completen donde corresponda -en cada una de las alternativas- y comparen escribiendo al menos una diferencia y una similitud entre ambas alternativas de solución.

Propuesta A	Propuesta B
<p>La propuesta consiste en suprimir primero los (), luego los [], en tercer lugar las { } y por último se resuelve la suma algebraica que resulta.</p>	<p>La propuesta consiste en resolver primero los (), luego los [], en tercer lugar las { }.</p>
$\frac{16}{4} - \{ -0,3 + [-1,5 - 8,5 - (-0,5 + 1)] - \frac{9}{3} \} =$	$\frac{16}{4} - \{ -0,3 + [-1,5 - 8,5 - (-0,5 + 1)] - \frac{9}{3} \} =$
<p>Identifiquen el paréntesis, observen el signo que lo precede y justifiquen por qué al eliminarlo la expresión resulta:</p>	<p>Observen el paréntesis y resuelvan el cálculo que encierra.</p>
$\frac{16}{4} - \{ -0,3 + [-1,5 - 8,5 - 0,5 - 1] - \frac{9}{3} \} =$	$\frac{16}{4} - \{ -0,3 + [-1,5 - 8,5 - (.....)] - \frac{9}{3} \} =$
<p>Ahora, para suprimir los corchetes ¿Qué deben observar?</p> <p>.....</p>	<p>Observen el signo que precede al paréntesis y justifiquen por qué al eliminarlo la expresión resulta:</p>
<p>Como los corchetes están precedidos por un signo positivo, ¿qué ocurre con los signos de los números que encierran?</p> <p>.....</p>	$\frac{16}{4} - \{ -0,3 + [-1,5 - 8,5 - 0,5] - \frac{9}{3} \} =$ <p>Identifiquen el corchete en la expresión anterior y resuelvan el cálculo que encierra.</p>
<p>Si suprimen los corchetes la expresión queda:</p>	$\frac{16}{4} - \{ -0,3 + [.....] - \frac{9}{3} \} =$ <p>Para eliminar el corchete deben observar el signo</p>

$$\frac{16}{4} - \left\{ -0,3 \dots\dots\dots - \frac{9}{3} \right\} =$$

Observen las llaves de la expresión anterior e indiquen qué signo las precede:

.....

Como están precedidas por un signo negativo, como se muestra en la siguiente expresión (que debe coincidir con la expresión que antes obtuvieron), al eliminarlas, ¿qué ocurre con los signos de los términos que encierran?

.....

$$\frac{16}{4} - \left\{ -0,3 - 1,5 - 8,5 + 0,5 - 1 - \frac{9}{3} \right\} =$$

Eliminen las llaves.

$$\frac{16}{4} \dots\dots\dots$$

Simplifiquen el primer término y el último, escribiendo la expresión irreducible de dichos números racionales expresados en forma fraccionaria y obtendrá la siguiente suma algebraica que debe resolver:

$$4 + 0,3 + 1,5 + 8,5 - 0,5 + 1 + 3 = \dots\dots\dots$$

Luego, el resultado final es 17,8.

que lo precede, que en este caso es:, por lo que al eliminar el corchete la expresión resulta:

$$\frac{16}{4} - \left\{ -0,3 - 10,5 - \frac{9}{3} \right\} =$$

Identifiquen las llaves en la expresión anterior y resuelvan el cálculo que encierra.

$$\frac{16}{4} - \left\{ \dots\dots\dots \right\} =$$

Observen el signo que precede a las llaves y justifiquen por qué al eliminarlas la expresión resulta:

$$\frac{16}{4} + 13,8 =$$

¿El primer sumando, que corresponde a un número racional, está escrito en su expresión fraccionaria irreducible? ¿Se puede simplificar la expresión dividiendo el numerador y denominador por un mismo número?

¿Por cuál?

Simplifiquen

$$\frac{16}{4} = \dots\dots\dots$$

Al simplificar el primer sumando la expresión resulta:

$$4 + 13,8 = \dots\dots\dots$$

Luego, el resultado final es 17,8.

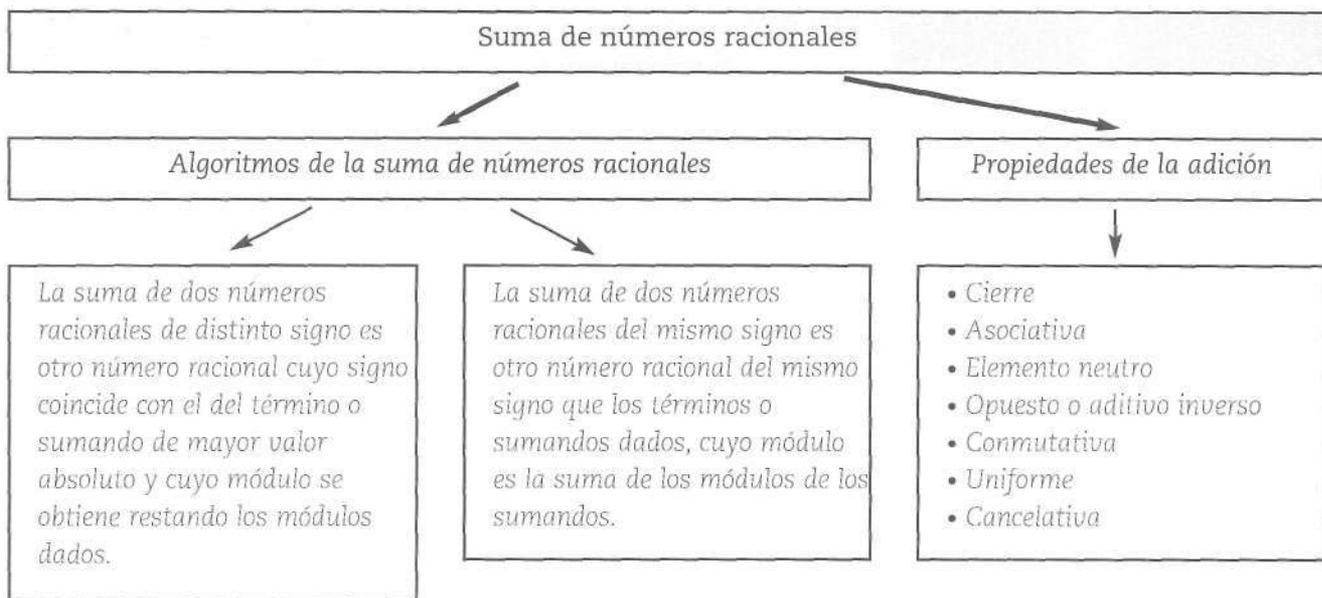
2. Analicen nuevamente los pasos realizados en ambas propuestas y resuelvan el siguiente cálculo siguiendo una de las alternativas de resolución (resolviendo o eliminando los paréntesis, corchetes y llaves, en ese orden).

$$a) \frac{1}{4} - \left\{ 3 - \left[\frac{2}{5} + (-0,5 - 1,5 + 4) \right] + \frac{10}{5} \right\} =$$

$$b) \left\{ 2,3 - \left[\frac{7}{2} + \left(1,75 - 1,5 + \frac{3}{4} \right) + 3,5 \right] + \frac{5}{2} \right\} =$$

$$c) \frac{5}{4} - \left\{ \frac{9}{3} - \left[\frac{7}{4} - \left(0,25 + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{3}{2} - 0,75 \right) \right] \right\} =$$

Antes de seguir adelante es importante que revisen lo trabajado hasta el momento ya que estas propiedades serán utilizadas nuevamente cuando trabajemos en la resolución de ecuaciones y cálculos. Para ello les puede ayudar el esquema que se muestra a continuación:



ACTIVIDADES

1.) Resuelva los siguientes cálculos mostrando el procedimiento seguido:

a) $3 - \frac{1}{2} + \frac{8}{7} - \frac{10}{3} =$

b) $\frac{4}{5} - (1,5 + 2) + \left(-\frac{5}{2} + 2\right) =$

c) $\{8,3 - [3 - 2,5 + (0,8 - 1,2)] - 5\} =$

2. Resuelva los siguientes problemas. Para ello recuerde los pasos realizados en las situaciones analizadas.

a) Dos escaladores en roca han realizado, durante la primera jornada, la cuarta parte de la ruta de ascenso y durante la segunda jornada otras dos cuartas partes de la misma. ¿Qué parte de la ruta ya han escalado?

b) La desinfección de un establecimiento educativo se realizó en tres jornadas. El primer día se desinfectaron las dos quintas partes de las instalaciones, en la segunda jornada una tercera parte de las mismas y se completó el trabajo durante el tercer día. ¿Qué parte del total del trabajo se realizó durante la tercer jornada?

c) Un automóvil necesita las tres quintas partes de la capacidad del tanque de combustible para recorrer la primera etapa de una carrera, $\frac{3}{4}$ para recorrer la segunda etapa y cinco octavos para la tercera.

- ¿Qué parte del tanque ocupó al finalizar la segunda etapa?
- ¿Le alcanza la capacidad de un tanque para recorrer las dos primeras etapas?
- ¿Por qué?

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Situación 1

Un destacamento policial tiene el 70% de la totalidad de los móviles destinados a realizar rondas de vigilancia. Las dos quintas partes de los autos destinados a la vigilancia se llevan al taller de mantenimiento. ¿Qué parte de la totalidad de los autos del destacamento son llevados al taller de mantenimiento?

Para comenzar a resolver esta situación es importante tener claro cuáles son los datos que resultan útiles para resolverla, teniendo presente lo que se pide. Para ello responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué parte de la totalidad de los autos del destacamento hacen tareas de vigilancia?

b) Si bien se sabe que el 70% de los móviles hace tareas de vigilancia, ¿qué expresión fraccionaria equivale a ese porcentaje?

Complete: $70\% = \frac{\dots}{\dots}$

que puede ser simplificada (si divide numerador y denominador por el número 10) y queda la expresión: $\frac{\dots}{\dots}$.

c) ¿Qué significado tiene que las $\frac{7}{10}$ partes de los autos del destacamento hacen tareas de vigilancia?

d) ¿Van al taller las $\frac{2}{5}$ partes de todos los móviles del destacamento o las dos quintas partes del 70% de los autos del destacamento?

e) ¿Qué pide el problema?

Con esta serie de preguntas se pretende que se clarifique lo que se pide en el problema. Lo que se busca es encontrar las dos quintas partes (una parte $\frac{1}{5}$) del 70% o, lo que es lo mismo, las dos quintas partes de las $\frac{70}{100}$ partes de la totalidad de los móviles policiales (otra parte). Es decir **se busca encontrar una parte de otra parte de la totalidad** de los móviles policiales del destacamento. De otra forma lo que se busca es $\frac{2}{5}$ del 70% de la totalidad de los autos del destacamento policial.

Esta expresión verbal la podemos escribir en símbolos:

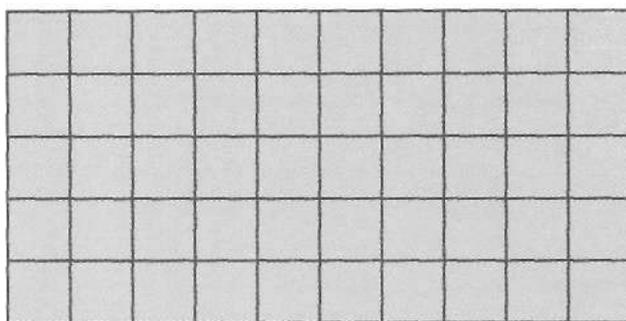
$$\boxed{\frac{2}{5} \text{ de } \frac{70}{100}}$$

f) ¿Qué cálculo hay que hacer cuando se busca, como en este caso, una parte de otra parte de un todo o totalidad?

Si no está seguro de cuál es el cálculo que lo resuelve piense en realizar una representación gráfica y señalar en la misma, primero, el 70% de la totalidad de los móviles que son los que están destinados a vigilancia.

Considere como antes se expresó que 70 % puede ser expresado como $\frac{70}{100}$ y que, simplificado, equivale a $\frac{7}{10}$.

g) Ahora le proponemos imaginar que la totalidad de los móviles está representada por un rectángulo. Marque con color en ese rectángulo las siete décimas partes de la totalidad de los móviles.

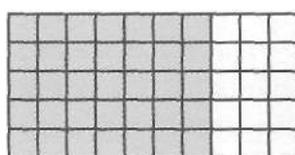


Luego, de esa parte sombreada, marque con una cruz las partes que correspondan a los móviles que son llevados al taller; es decir marque con cruces las dos quintas partes de las siete décimas partes del todo.

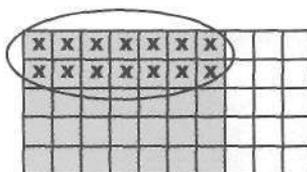
Observe detenidamente la parte del todo señalada con cruces: es la parte buscada, es la solución del problema.

La parte señalada con cruces es $\frac{14}{50}$, lo que significa que las $\frac{14}{50}$ partes, o lo que es equivalente (si simplifica) las $\frac{7}{25}$ partes, de la totalidad de los móviles policiales son llevados al taller.

h) Compare la representación que realizó antes con las siguientes:



Móviles destinados a vigilancia



Móviles llevados al taller

NOTAS

NOTAS

Si piensa en lo que se buscaba inicialmente:

$\frac{2}{5}$ de $\frac{70}{100}$ o lo que es equivalente $\frac{2}{5}$ de $\frac{7}{10}$ se sabe que es $\frac{14}{50}$ del total de móviles.

i) Observe el cuadro anterior y responda ¿qué cálculo haría con los numeradores 2 y 7 para obtener 14 y qué cálculo haría con los denominadores 5 y 10 para obtener 50?

Posiblemente pensó en un producto, y está en lo cierto. Cada vez que en una situación problema se busque una parte de otra parte el cálculo a realizar es un producto entre los números racionales. En este caso el producto es:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{70}{100} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

Nota: el producto de dos números racionales expresados en forma fraccionaria es:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \text{ siendo } a, b, c \text{ y } d \text{ números enteros, } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

Nota: recuerde que puede simplificar las fracciones antes de multiplicar, es más, sólo en el caso de la multiplicación también puede simplificar un numerador de un factor expresado en forma fraccionaria con el denominador de otro factor.

El resultado del calculo indica que las $\frac{7}{25}$ partes del total de los móviles policiales del destacamento son llevados al taller de mantenimiento.

Conclusión: cada vez que una situación implique encontrar una parte de otra parte de un todo el cálculo a realizar es una multiplicación de las fracciones que representan esas partes.

Situación 2

Trabajamos la siguiente situación con un cambio respecto de la anterior. Un destacamento policial tiene el 70% de los 50 móviles que posee destinados a realizar rondas de vigilancia. Las dos quintas partes de los autos destinados a la vigilancia se llevan al taller de mantenimiento.

¿Qué parte de la totalidad de los autos del destacamento son llevados al taller de mantenimiento? ¿Cuántos autos son llevados al taller?

1. Lea atentamente la situación y responda:

a) ¿Qué variación hay entre la **situación 1** y ésta?

b) Considerando lo trabajado en la situación 1, ¿puede responder a la pregunta a)?

c) ¿Cuál es el todo o la totalidad a la que hace referencia el problema?

d) ¿Cuántos autos tiene en total el destacamento policial?

Como la primera de las preguntas fue abordada en la situación 1, ya conocemos su respuesta. Se sabe que las $\frac{7}{25}$ partes de la totalidad de los móviles son llevados al taller.

Pero como ahora se conoce la totalidad (el todo) de los móviles, esas siete veinticincoavas partes son de los 50 móviles.

Es decir que hay que encontrar $\frac{7}{25}$ de 50 móviles. Se busca una parte de un todo por lo que se puede pensar... ¿en qué cálculo?

Si pensó en un producto está en lo cierto.

Si resuelve $\frac{7}{25} \cdot 50 = \dots\dots\dots$, obtendrá el número de autos que son llevados al taller de mantenimiento.

Escriba la respuesta de la segunda pregunta:

Conclusión: cada vez que una situación implique encontrar una parte de un todo el cálculo a realizar será una multiplicación.

Si una persona, para responder a la segunda pregunta (b), realiza el siguiente cálculo:

$$\frac{7}{25} \cdot \frac{70}{100} \cdot 50 = 14$$

Es decir que 14 autos son llevados al taller y son 14 autos los

NOTAS

Para responder a esta pregunta le pedimos que considere que la parte decimal de todos los factores tiene un número finito (se puede contar) de cifras decimales. Lea nuevamente el tema distintas escrituras de un número racional.

Se trata de números racionales decimales o simplemente números decimales.

Cálculo	Número del orden decimal del primer factor	Número del orden decimal del segundo factor	Número del orden decimal del resultado
a) $6,2 \cdot 4,33 = \dots\dots\dots$		2	3
b) $2,3 \cdot 5,23 = \dots\dots\dots$	1		
c) $2,64 \cdot 3,23 = \dots\dots\dots$	2		

NOTAS

4. Compare el resultado de sumar los números de las dos primeras columnas con el de la última columna. ¿Qué ocurre?

.....

Es decir que el número de orden decimal del producto o resultado de multiplicar dos números decimales es igual a la suma de los números de órdenes de los factores correspondientes.

.....

Cálculo	Cálculo de los factores considerados "como números enteros" (sin considerar la coma decimal)
a) $6,2 \cdot 4,33 = 26,846$	$62 \cdot 433 = \dots\dots\dots$
b) $2,3 \cdot 5,23 = 12,029$	$23 \cdot 523 = \dots\dots\dots$
c) $2,64 \cdot 3,23 = 8,5272$	$264 \cdot 323 = \dots\dots\dots$

.....

6. Es decir, que si quiere multiplicar, por ejemplo $6,4 \cdot 3,12$, considere los números "como números enteros". ¿Cuál es su producto?

.....

NOTAS

¿De qué orden decimal es el primer factor?

¿Y el segundo factor?

¿De qué orden decimal es el resultado?

Por lo tanto el producto $6,4 \cdot 3,12 = \dots\dots\dots$

Conclusión: el producto de dos o más números racionales decimales, o simplemente decimales, expresados en forma decimal, se obtiene multiplicando los factores como si fueran números enteros y el número del orden decimal del resultado es igual a la suma de los números de los órdenes decimales de los factores que intervienen.

7. Ahora analice el siguiente cálculo:

$$\frac{4}{3} \cdot (-1,2)$$

a) Si le piden trabajar usando la escritura decimal de los factores, ¿cómo lo resuelve?...

b) Seguramente pensó en realizar el cociente $4 : 3$. Pero al resolverlo, ¿qué característica presenta la parte decimal de dicho cociente?

Como la escritura decimal de $\frac{4}{3} = 1,\overline{3}$ es periódica, como antes se ha mencionado, es necesario acordar con cuántas cifras decimales se va a trabajar para calcular el producto, que siempre resultará aproximado.

8. Resuelva el producto: $\frac{4}{3} \cdot 1,2 =$

a) Utilizando dos cifras decimales.

b) Utilizando tres cifras decimales.

c) Compare los resultados obtenidos en a) y en b).

Conclusión: si en el producto de dos o más números

racionales expresados en notación decimal hay factores con la parte decimal periódica, se debe tomar una decisión sobre el número de cifras decimales empleadas, que dependerá de la precisión con que se desee trabajar para calcular el producto.

9. Para obtener el resultado exacto del producto $\frac{4}{3} \cdot 1,2 = \dots\dots\dots$, hay que trabajar con los factores expresados en notación fraccionaria. Considerando que 1,2 se lee "doce décimos" ¿Cómo lo expresaría en notación fraccionaria?

Si la expresión que propuso puede ser simplificada, hágalo:

Luego el producto inicial queda:

$$\frac{4}{3} \cdot 1,2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{24}{15}$$

Simplificando el resultado final, ¿qué número obtiene?

Finalmente, el producto exacto es $\frac{8}{5}$.

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN EN Q



ACTIVIDADES

1. Calculen los productos que se indican a continuación:

a) $4 \cdot (-0,10) = \dots\dots\dots$ b) $-10 \cdot \left(-\frac{50}{2}\right) = \dots\dots\dots$ c) $0,4 \cdot 0,23 = \dots\dots\dots$ d) $-\frac{1}{2} \cdot 0,5 = \dots\dots\dots$

Respuestas:

-0,40; +250; 0,092; -0,25

2. Los productos o resultados que obtienen en todos los casos, ¿a qué conjunto numérico pertenecen?

Se pueden seguir multiplicando pares de números racionales y el producto siempre será un número racional que, además, es único.

NOTAS



PENSAR

Ley de cierre

El producto de dos números racionales es un número racional único.

3. En esta actividad aparecerán símbolos matemáticos, como los corchetes [] y llaves { }, que indican el orden en que se debe realizar el cálculo. Resuelvan este cálculo que tiene tres factores:

$$0,4 \cdot (-8) \cdot 0,1 = \dots\dots\dots$$

Al resolver este cálculo posiblemente pensaron:

$$0,4 \cdot (-8) = -3,2$$

Luego, a este resultado lo multiplicaron con el tercer factor:

$$-3,2 \cdot 0,1 = -0,32$$

El cálculo que efectuaron se indica con el uso de corchetes y llaves de la siguiente forma:

Los corchetes indican el primer producto que se efectúa.

$$\{ [0,4 \cdot (-8)] \cdot 0,1 \} = -0,32$$

Las llaves indican que al primer producto (-3,2) hay que multiplicarlo por 0,1.

Pero también este mismo cálculo se puede pensar de este modo:

Los corchetes indican el primer producto que se efectúa. (-0,8)

$$\{ 0,4 \cdot [(-8) \cdot 0,1] \} = -0,32$$

Las llaves indican que al primer producto (-0,8) hay que multiplicarlo por 0,4.

Podemos concluir que: $\{ [0,4 \cdot (-8)] \cdot 0,1 \} = \{ 0,4 \cdot [(-8) \cdot 0,1] \}$

En síntesis, notarán que en ambos casos se asociaron primero dos factores para finalmente, al producto, multiplicarle el tercer factor. El orden en que se asocian los factores no altera el resultado final del cálculo.

PENSAR



Propiedad asociativa

Para todos los números racionales a, b, c se verifica que:

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

4. Analicen y completen con el resultado de cada uno de los siguientes productos:

a) $-0,4 \cdot 1 = \dots\dots\dots$

b) $1 \cdot (-0,4) = \dots\dots\dots$

c) $\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1} = \dots\dots\dots$

d) $\frac{1}{1} \cdot \frac{5}{4} = \dots\dots\dots$

a) ¿Cómo resultan los productos en los cálculos a) y b)?, ¿y en el caso de c) y d)?

.....

.....

El resultado que ustedes han obtenido en los dos primeros cálculos es $-0,4$ y en los otros dos cálculos es $\frac{5}{4}$.

Estos ejemplos verifican que si a un número racional se lo multiplica por el número uno (1), a izquierda o derecha, el producto que se obtiene es siempre el número racional considerado. Por ello, el número 1 es el elemento neutro de la multiplicación en \mathbb{Q} .

PENSAR



Elemento neutro

Existe el número 1 perteneciente a \mathbb{Q} , tal que para todo número racional "a" se verifica: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

5. Analicen y completen:

$$\left. \begin{array}{l} -0,5 \cdot 2 = \dots\dots\dots \\ 2 \cdot (-0,5) = \dots\dots\dots \end{array} \right\} -0,5 \cdot 2 = 2 \cdot (-0,5)$$

NOTAS

Podemos concluir que: el orden en que se multipliquen los factores no altera el producto o resultado.



PENSAR

Propiedad conmutativa

Para todos los números racionales a, b se verifica que:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

6. Analicen la siguiente igualdad y observen los nombres que aparecen.

$$\underbrace{3 \cdot 0,5}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{0,3 \cdot 5}_{\text{Segundo miembro}}$$

El signo igual (=) separa los dos miembros de la igualdad dada. ¿Se trata de una igualdad?

Para verificar si la expresión es realmente una igualdad completen:

$$3 \cdot 0,5 = \dots\dots\dots \text{ y } 0,3 \cdot 5 = \dots\dots\dots$$

Observen el resultado que obtuvieron en cada caso. Si resultaron números iguales, entonces es una igualdad. ¿Qué ocurrió?, ¿es una igualdad?

Este cálculo que realizaron se puede expresar:

$$\underbrace{3 \cdot 0,5}_{1,5} = \underbrace{0,3 \cdot 5}_{1,5}$$

Es decir, se realiza el cálculo en cada miembro y luego se comparan los resultados obtenidos.

a) Si multiplican ambos miembros por el número $(-0,1)$ la expresión que resulta es:

Realicen el cálculo indicado en cada miembro. Recuerden la *propiedad asociativa*.

Primer miembro Segundo miembro

$$\overbrace{3 \cdot 0,5} \cdot \overbrace{(-0,1)} = \overbrace{0,3 \cdot 5} \cdot \overbrace{(-0,1)}$$

$$\dots\dots \cdot (-0,1) = \dots\dots \cdot (-0,1)$$

$$- 0,15 = - 0,15$$

Podemos concluir que si a ambos miembros de la igualdad se los multiplica por un mismo número racional, se mantiene la igualdad.



PENSAR

Propiedad uniforme

Para todos los números racionales a, b, c ; se cumple que si $a = b$ entonces $a \cdot c = b \cdot c$

La propiedad que analizaremos, la cancelativa, está muy vinculada con la anterior y se refiere a la cancelación de factores iguales (distintos de cero), en distintos miembros.

Ejemplo:

$$c) 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 9 = 2 \cdot \left(-\frac{2}{6}\right) \cdot \frac{27}{3} \quad \text{cancelando (se elimina) el 2 en ambos miembros la expresión queda:}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 9 = \left(-\frac{2}{6}\right) \cdot \frac{27}{3} \quad \text{y si resuelve el cálculo de cada miembro queda:}$$

$$-3 = -3$$

Luego, todo factor (distinto de cero) que aparece en ambos miembros de una igualdad puede ser cancelado conservando la igualdad.



PENSAR

Propiedad cancelativa

Para todos los números racionales a, b, c y $c \neq 0$, si $a \cdot c = b \cdot c$ entonces $a = b$

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN RESPECTO DE LA SUMA Y LA RESTA

ACTIVIDADES



1. Conteste las preguntas que se formulan a continuación. Observe la siguiente igualdad:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

a) ¿Cuántos miembros tiene?

b) ¿Cuántos y cuáles son los factores del primer miembro?

Seguramente usted contestó: "dos". Siendo los factores a y $(b + c)$

c) ¿Cuántos y cuáles son los términos que tiene el segundo miembro?.....

Seguramente usted contestó: "dos". Siendo los términos $a \cdot b$ y $a \cdot c$

d) Si observa los términos del segundo miembro y los compara con los factores del primer miembro ¿qué observa?

e) ¿Cuál es el primer factor del primer miembro?

Este factor " a " aparece en los términos del segundo miembro... ¿en cuáles? Como el factor " a " aparece en los dos términos del segundo miembro puede decirse que: **se ha distribuido el factor " a " en cada término.**

2. Trabaje sobre el siguiente ejemplo:

Para resolver el cálculo: $2 \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{2} - 3 \right)$ = pueden seguirse dos caminos, como veremos a continuación.

En primer lugar, le proponemos resolverlo sin distribuir el factor 2. Para ello realice lo que se pide:

a) Resuelva el cálculo que aparece entre paréntesis y luego encuentre el producto de dos con dicho número:

$$2 \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{2} - 3 \right) = 2 \cdot \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Ahora, le proponemos resolverlo distribuyendo el factor 2. Para ello realice lo que se pide:

b) Distribuya el factor 2 en cada término encerrado en el paréntesis; es decir multiplique cada uno de los términos que encierra el paréntesis por dos. Complete las líneas de puntos.

$$2 \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{2} - 3 \right) = 2 \cdot \frac{5}{3} + 2 \cdot \dots\dots\dots - 2 \cdot \dots\dots\dots$$

c) La expresión obtenida sepárela en términos y resuelva el cálculo que aparece en cada uno de ellos. Complete la línea de puntos y obtenga el resultado final.

$$2 \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{2} - 3 \right) = 2 \cdot \frac{5}{3} + 2 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot 3 = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Si observa el resultado que obtuvo al resolver el ejercicio por cada uno de los caminos propuestos, encontrará que los dos resultados coinciden. Es decir, en ambos casos obtuvo $\frac{2}{6}$ o bien si, simplificó, obtuvo $\frac{1}{3}$.

Entonces, dado que se obtiene el mismo resultado puede escribir la siguiente igualdad:

$$2 \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{2} - 3 \right) = 2 \cdot \frac{5}{3} + 2 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot 3$$

En esta expresión se observa que el factor 2 se ha distribuido en el segundo miembro a cada término de la suma algebraica que está encerrada entre paréntesis en el primer miembro.

3. Resuelva el siguiente cálculo de las dos formas posibles:

$$2 \cdot (5 + 10 - 3) =$$

El camino seguido por usted seguramente es similar a lo que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (5 + 10 - 3) &= 2 \cdot 5 + 2 \cdot 10 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot \quad 12 \quad - 10 + 20 - 6 & \\ 24 &= 24 \end{aligned}$$

En los dos ejemplos anteriores usted ha podido aplicar y verificar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y a la resta.

PENSAR



Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y a la resta

El producto de un número racional por una suma algebraica puede obtenerse calculando la suma de los productos de cada término por el factor considerado.

En símbolos: para todos los números racionales a, b, c se cumple que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

ACTIVIDADES



1. Resuelva cada uno de los siguientes productos:

$$\text{a) } -\frac{1}{3} \cdot (-3) = \dots \quad \text{b) } \frac{1}{5} \cdot 5 = \dots \quad \text{c) } -\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = \dots \quad \text{d) } \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{7} = \dots$$

Al observar los productos obtenidos, ¿qué ocurre?

Seguramente coincidirá en que todos son iguales al número 1, es decir, al elemento neutro de la multiplicación. En los casos como estos, se dice que los factores son números racionales inversos. Así se tiene que $-\frac{1}{3}$ y -3 son inversos, $\frac{1}{5}$ y 5 son inversos multiplicativos como los son también $-\frac{2}{5}$ y $-\frac{5}{2}$.

¿Cuál es el inverso multiplicativo de $\frac{3}{11}$?.....

Si pensó en el número $\frac{11}{3}$ está en lo correcto, ya que $\frac{11}{3} \cdot \frac{3}{11} = 1$, el resultado 1 es lo que permite afirmar que se trata de números racionales inversos.

Observe. El inverso de un racional positivo es otro racional positivo. El inverso de un racional negativo es otro racional también negativo. Podemos concluir también que el producto de un número distinto de cero por su inverso es 1.



PENSAR

Propiedad del inverso multiplicativo

Todo número racional distinto de cero tiene su inverso multiplicativo.

COCIENTES DE NÚMEROS RACIONALES

Antes de comenzar a resolver diversas situaciones, recordaremos algunos conceptos para resolver los cálculos que surjan.



ACTIVIDADES

1. Piense y escriba una situación que para su resolución deba calcularse un cociente entre números racionales. Luego resuélvala.

2. Ahora lea la siguiente situación:

Suponga que a una persona que está siguiendo una dieta alimenticia muy rigurosa, el nutricionista le indica que el medio litro de gaseosa que puede consumir diariamente debe beberlo repartido en dos tomas, una antes del almuerzo y la otra antes de la cena. ¿Qué parte de un litro de gaseosa bebe en cada oportunidad?

a) ¿Qué pide el problema? Escriba con sus palabras su enunciado.

.....

.....

b) ¿Qué debe hacer la persona con el medio litro para cumplir con las indicaciones dadas por el nutricionista?

.....

.....

c) ¿Qué cálculo resuelve la situación planteada?

Situaciones como éstas en las que hay que partir, en este caso medio litro de gaseosa en dos partes, implican que, aritméticamente, se realice un cociente entre los números racionales $\frac{1}{2}$ y 2 para responder a lo pedido.

Luego el cálculo que tiene que resolver es:

$$\frac{1}{2} : 2 = \dots\dots\dots$$

Entonces, al resolver el cociente anterior obtiene:

$$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

 Inverso multiplicativo

Es decir que, en cada toma, antes del almuerzo y antes de la cena, la parte del litro de gaseosa que debe beberse es $\frac{1}{4}$ (una cuarta) parte del litro. En otras palabras un cuarto litro de gaseosa: $\frac{1}{4}$ litro.

Otro aspecto a considerar al realizar el **cociente entre dos números racionales** es la regla de signos correspondiente para determinar el signo del cociente o resultado:

- Si se dividen dos números racionales del mismo signo el cociente es positivo.
- Si se dividen dos números racionales de distinto signo el cociente es negativo.

cociente entre dos números racionales

El cociente entre dos números racionales expresados en forma fraccionaria es:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \text{ donde } \frac{d}{c}$$

es el inverso multiplicativo de $\frac{c}{d}$, del divisor.

NOTAS

COCIENTES ENTRE NÚMEROS RACIONALES
EXPRESADOS EN FORMA DECIMAL

Situación 1

Suponga que se desea repartir \$ 354,24 entre 4 personas. ¿Cuánto dinero recibirá cada una de ellas?

Proponga y resuelva el cálculo que dirige la situación planteada.

Posiblemente coincidirá que el cálculo a resolver es $354,24 : 4$ y el resultado del mismo es: 88,56.

Por lo tanto, cada una de las personas recibirá un monto de \$ 88,56.

En esta situación usted resolvió un cociente donde el dividendo es un número decimal y el divisor es un número entero. Pero, ¿qué ocurre en los casos en que el divisor también es un número decimal?

a) Por ejemplo si usted desea dividir:

$$12 : 0,04 =$$

Si usted resuelve el cálculo empleando una calculadora no tendrá ningún inconveniente. Pero si decide resolverlo escribiendo cada paso de la cuenta notará que la dificultad está en el divisor ¿Por qué?

Efectivamente el divisor -cuatro centésimos- es un número decimal. Para resolver el cálculo puede pensar en seguir dos caminos:

- expresar dicho cociente en forma fraccionaria y resolverlo, o bien
- pensar y buscar de qué forma podría transformarse el divisor en un número entero para que el cálculo sea de la forma del propuesto en la situación 1.

El primero de los caminos a seguir usted ya lo conoce. Resuelva el cociente equivalente al dado pero expresado en forma fraccionaria. Para lo cual le mostramos la expresión que resulta al escribir el dividendo y el divisor del cálculo en forma fraccionaria:

NOTAS

$$12 : 0,04 = 12 : \frac{4}{100} = \dots\dots\dots$$

Pero para el segundo de los caminos hay que pensar cómo transformar el divisor en un número entero. ¿Se le ocurre alguna alternativa? Coméntela:

.....

¿Piense por qué número debe multiplicar al divisor para transformarlo en el número entero 4?

Pruebe con multiplicarlo por 100 y obtiene que $0,04 \cdot 100 = 4$

Si el divisor de una división es multiplicado por 100, en este caso para obtener un cálculo equivalente al dado inicialmente, se debe multiplicar por el mismo número al dividendo. De esta forma queda:

$$12 : 0,04 = (12 \cdot 100) : (0,04 \cdot 100) = 1.200 : 4 =$$

Resuelva el cálculo escrito al final. ¿Qué valor obtuvo?

Compare el resultado obtenido siguiendo esta forma de resolver el cociente indicado con el obtenido por el otro camino (expresando el cociente en notación fraccionaria). ¿Qué ocurre?

.....

Seguramente siguiendo un camino u otro, o bien empleando calculadora, el resultado o cociente que se obtiene es 300, en todos los casos.

Situación 2

Resuelva el siguiente cociente expresado en forma decimal:

$$1,69 : 2,5 =$$

Ahora le proponemos que lea lo que usted hizo y compare su cálculo con el que se muestra a continuación:

$$1,69 : 0,5 = (1,69 \cdot 10) : (0,5 \cdot 10) = 16,9 : 5 = 3,38$$

PENSAR



Para resolver los cocientes en los cuales el divisor es un número escrito en notación decimal debe transformarse dicho cociente en un

cociente equivalente con el divisor entero. Para lo cual se debe multiplicar el dividendo y el divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor (por ejemplo: por 10, por 100, por 1.000).

PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN



ACTIVIDADES

Les comentamos que en el análisis de las propiedades sólo consideraremos las más utilizadas en la resolución de cálculos y ecuaciones.

1. Calculen el cociente de las siguientes divisiones. Pueden ayudarse con una calculadora.

a) $-0,16 : (-2) = \dots\dots\dots$ b) $\frac{3}{5} : \left(-\frac{18}{25}\right) = \dots\dots\dots$ c) $0,18 : 0,003 = \dots\dots\dots$

Respuestas:
a) 0,08; b) $-\frac{5}{6}$; c) 60

Si siguen calculando cocientes con números racionales encontrarán que el cociente es único y es un número racional.



PENSAR

Propiedad de cierre

El cociente entre dos números racionales es un número racional único.

¿La división entre números racionales cumple la propiedad conmutativa?

2. Calculen los cocientes y completen con "igual" (=) o "no es igual" (≠) según corresponda. En este caso también pueden ayudarse con la calculadora.

a) $-1,6 : 1,6 \dots\dots\dots 1,6 : (-1,6) =$ b) $-0,25 : 5 \dots\dots\dots 5 : (-0,25)$ c) $\frac{2}{4} : \frac{8}{9} \dots\dots\dots \frac{8}{9} : \frac{2}{4}$

3. Escriban una conclusión.

.....

.....

.....

Al observar cada uno de los ejercicios, se visualiza que se han conmutado el dividendo por el divisor en el segundo miembro de cada una de las propuestas. Al calcular los cocientes, solamente en a) fue posible que ustedes escribieran una igualdad, no ocurriendo lo mismo con los puntos b) y c).

PENSAR



La división de números racionales no cumple la propiedad conmutativa.

4. Les proponemos que verifiquen el siguiente enunciado: la división de números racionales no es asociativa.

a) Para ello resuelvan los siguientes cálculos respetando el orden que indican los paréntesis y completen con "igual" (=) o "no es igual" (\neq) según corresponda. Pueden ayudarse con la calculadora.

A	B
$(12,87 : 3,45) : 0,98$ $12,87 : (3,45 : 0,98)$	$(\frac{2}{3} : \frac{4}{5}) : \frac{1}{17} =$ $\frac{2}{3} : (\frac{4}{5} : \frac{1}{17})$
..... : 0,98 $12,87 :$: $\frac{1}{17} =$ $\frac{2}{3} :$
.....

En los cálculos que ustedes realizaron habrán podido observar que la división no cumple con la propiedad asociativa.

PENSAR



La división de números racionales no cumple la propiedad asociativa.

ACTIVIDADES



1. Resuelva cada una de las siguientes situaciones:

a) Andrés desea saber con cuántos vasos de $\frac{1}{4}$ litro puede llenar 4 botellas de $\frac{3}{4}$ litros de jugo cada una.

b) Juan va al banco y pide 10 billetes de \$100, 15 billetes de \$50 y 20 billetes de \$5 para pagar el trabajo de una semana a 10 cosechadores que han juntado la misma cantidad de fichas cada uno. ¿Cuánto se le paga a cada trabajador? Si por cada ficha se pagan \$0,50, ¿cuántas fichas entregó cada cosechador?

NOTAS

CÁLCULOS CON SUMAS, RESTAS, PRODUCTOS Y COCIENTES DE NÚMEROS RACIONALES

Realice el análisis del siguiente cálculo:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{25}{10} + 5: \left(-\frac{1}{5}\right) - \frac{4}{5}$$

Para realizar el cálculo indicado le sugerimos que lo resuelva primero usted solo y luego compare con los pasos que se muestran a continuación:

1º Se separa en términos. Observe.

$$\overbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{25}{10}} + \overbrace{5: \left(-\frac{1}{5}\right)} - \overbrace{\frac{4}{5}} =$$

2º Se resuelve la operación indicada en cada término.

$$1 + (-25) - \frac{4}{5} =$$

3º Se eliminan los paréntesis, teniendo en cuenta las reglas de los signos.

$$1 - 25 - \frac{4}{5} =$$

4º Se resuelve la suma algebraica y se obtiene el resultado final.

$$- \frac{124}{5}$$

En el siguiente cálculo, siga cada uno de los puntos que se indican:

$$\frac{3}{2} \cdot \left(2 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{4}{6} + \frac{1}{3}\right) : \frac{3}{4} =$$

1º Separe en términos.

2º Resuelva cada paréntesis.

3º Resuelva las operaciones indicadas en cada término,

NOTAS

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

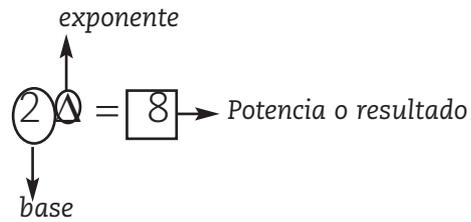
.....

Este producto (8) expresado como multiplicación de un factor repetido un número determinado de veces (tres veces: $2 \cdot 2 \cdot 2$), se puede escribir de una forma "abreviada":

$2^3 = 8$ y se lee: *2 elevado a la tercera es igual a 8.*

Esta nueva forma de escribir un producto en la que se repite un mismo factor se llama **potencia**.

En la potencia el número que se repite como factor se llama **base** y el número de veces que ese factor se repite se llama **exponente** y al resultado se lo llama también **potencia**. Así, en el ejemplo se tiene:



Situación 2

Lea, analice y complete la siguiente situación

Juan desea contar la cantidad de baldosas que tiene su patio, cuya representación se muestra en la figura de la izquierda.

Primero comienza contando las baldosas una por una.

La primera vez contó 98 baldosas, la segunda 96 y la tercera 97.

Piensa en otro modo de hacer el recuento.

¿Cómo sugiere usted contar la totalidad de las baldosas, sin contar una por una?

.....

Juan, para volver a contar, piensa de la siguiente forma:

- "Tengo 10 hileras y en cada una 10 baldosas, es decir 10 repetido 10 veces". En total tengo: $10 \cdot 10 = 100$ ".

¿Cómo son los factores de esta multiplicación?

.....

¿Cuántos factores iguales tiene?

.....

Si lo escribe como una potencia, resulta:..... Se lee: 10 elevado a la segunda es igual a 100.

NOTAS

Situación 3

a) Exprese como potencia los siguientes productos:

$4 \cdot 4 = \dots\dots\dots$ Se lee: *cuatro elevado a la octava*.

$0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = \dots\dots\dots$ Se lee: *tres décimos elevados al cubo o a la tercera*.

b) Exprese como producto las siguientes potencias y resuelva:

$1,8^{\approx} = \dots\dots\dots$

Se lee: *dieciocho décimos elevado a la segunda o elevado al cuadrado*.

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\Delta} = \dots\dots\dots$

Se lee: *un tercio elevado a la tercera o un tercio elevado al cubo*.

LOS SIGNOS DE LA POTENCIACIÓN

Hasta el momento, solamente han aparecido cálculos de potencias con bases que son números racionales positivos. Pero no debemos perder de vista los números racionales negativos.

Situación 4

Para realizar las actividades que siguen, recuerde que si se multiplican dos factores del mismo signo el producto tiene el signo positivo y si se multiplican dos factores que tienen distinto signo el producto es negativo.

Para comenzar, se muestra el cálculo de los puntos a) y b).

a) $(-5)^{\approx} =$ Se lee: *menos cinco elevado al cuadrado*.

Aplicando la definición de potenciación y notando que los factores son negativos, la potencia resulta:

$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$

Se lee: *menos cinco elevado al cuadrado es igual a menos cinco por menos cinco que es igual a 25*. El signo del producto es positivo.

b) $(-0,3)^4 =$

NOTAS

Aplicando la definición de potenciación y teniendo en cuenta el signo de los factores:

$$(-0,3)^4 = (-0,3) \cdot (-0,3) \cdot (-0,3) \cdot (-0,3)$$

Se lee: menos tres décimos elevado a la cuarta es igual a: menos tres décimos por menos tres décimos por menos tres décimos por menos tres décimos.

Aplicando la propiedad asociativa de la multiplicación en los dos primeros factores, y teniendo presente los signos de los factores, resulta: $0,09 \cdot (-0,3) \cdot (-0,3) =$

Aplicando nuevamente la propiedad asociativa y observando que: "si los dos factores tienen distinto signo el producto es negativo", resulta: $-0,027 \cdot (-0,3) =$

Por último y como los dos factores tienen el mismo signo, el producto es positivo.

Resultando finalmente:

$$(-0,3)^4 = -0,027 \cdot (-0,3) = 0,0081$$

¿Por qué el resultado o potencia es un número racional expresado con notación decimal y tiene cuatro cifras después de la coma?

Recuerde que anteriormente usted resolvió productos de este tipo.

c) $(-2)^6 =$

Aplice la definición de potenciación y resuelva aplicando la regla de los signos.

d) $(-9)^2 =$

Aplice la definición de potenciación y resuelva.

Observe las potencias dadas en esta actividad y responda:

¿La base de estas potencias son números racionales positivos o negativos?

¿El exponente en cada una de ellas es par o impar?

¿Qué signo tiene el resultado?

NOTAS

Situación 5

Complete y calcule las siguientes potencias, a partir de la definición:

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^\Delta = \dots\dots\dots$

b) $(-1,1)^\Delta = \dots\dots\dots$

c) $(-2)^\Delta = \dots\dots\dots$

Observe las potencias dadas en esta actividad y responda:

¿La base de estas potencias son números racionales positivos o negativos?

¿El exponente en cada una de ellas es par o impar?

¿Qué signo tiene el resultado?

Conclusiones

En la *situación 3* se observa que si la base es un número racional positivo y el exponente es un número natural (par o impar), la potencia es un número positivo.

En la *situación 4* se observa que si la base es un número racional negativo y el exponente es un número natural par, la potencia es un número positivo.

En la *situación 5* se observa que si la base es un número racional negativo y el exponente es un número impar, la potencia es un número negativo.

RECORDAR

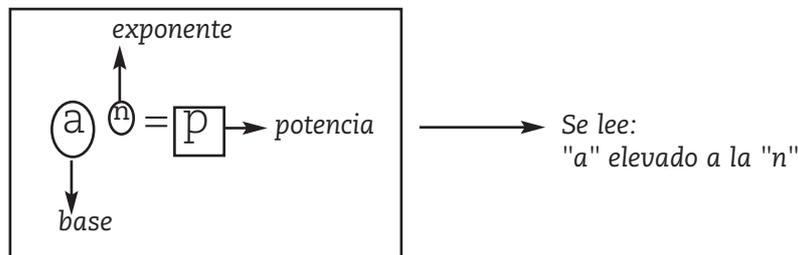


Para recordar los signos en la potenciación: la potencia que tiene como base un número racional y como exponente un número natural da por resultado otro número racional que es negativo únicamente cuando la base es un número negativo y el exponente es un número impar; en los otros casos la potencia es un número racional positivo.

NOTAS

ANÁLISIS DE CASOS ESPECIALES DE POTENCIAS CON BASE RACIONAL

Antes de avanzar, se muestra el siguiente esquema donde se considera que a y p son números racionales y n es un número entero.



Observación

Si un número racional está elevado a la segunda se lee, usualmente, que está elevado al **cuadrado**.

Si un número racional está elevado a la tercera se lee, usualmente, que está elevado al **cubo**.

- **Potencia con exponente igual a 1**

Recuerde la definición de potencia y resuelva:

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
$(\frac{2}{5})^1 = \dots\dots\dots$	$(-\frac{3}{5})^1 = \dots\dots\dots$	$1,4^1 = \dots\dots\dots$	$(-5)^1 = \dots\dots\dots$

Al observar los ejemplos resueltos seguramente obtuvo como resultado el mismo número que tiene la base de cada una de las potencias arriba propuestas. Esto se debe a que al ser el exponente el número 1, indica que la base está como factor una única vez, por lo que se puede concluir que:

La potencia de base racional que tiene exponente igual a 1 es igual al número racional que tiene como base.

- **Potencia con exponente 0 y base distinta de cero**

Lea con atención cada uno de los siguientes ejemplos de potencias que ya están resueltos:

NOTAS

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
$\left(-\frac{3}{2}\right)^0 = 1$	$(-0,02)^0 = 1$	$\left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1$	$158^0 = 1$

¿Qué resultado se obtiene cuando el exponente de una potencia es cero?

La potencia de base racional distinta de cero y exponente igual a cero es igual a 1.

Por ahora aceptaremos esta afirmación. A medida que avance en sus estudios podrá fundamentar por qué toda potencia con exponente cero es igual a uno.

- Potencia con exponente entero negativo y base distinta de cero

Lea con atención cada uno de los siguientes ejemplos resueltos:

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
$(2)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$ <p style="text-align: center;">opuesto ↑ inverso</p>	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ <p style="text-align: center;">opuesto ↑ inverso</p>	$\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(-\frac{5}{2}\right)^3 = -\frac{125}{8}$ <p style="text-align: center;">opuesto ↑ inverso</p>

Ejemplo 4
$(-0,2)^{-3} = \left(-\frac{2}{10}\right)^{-3} = \left(-\frac{10}{2}\right)^3 = -\frac{1000}{8} = -125$ <p style="text-align: center;">opuesto ↑ inverso</p>

Observe cada ejemplo y responda:

¿Qué signo tiene el exponente de las potencias de los ejemplos?

.....

En todos los casos las potencias tienen exponente negativo (es decir son números entero negativos) y fueron igualadas a otra potencia equivalente cuya base tiene el mismo signo. Pero, ¿qué número es respecto de la base inicial?

.....

NOTAS

Al igualar cada potencia a una potencia equivalente a la dada cuya base es el inverso multiplicativo de la base de la potencia inicial, ¿qué ocurrió con el exponente de esta nueva potencia? ¿Qué número es?

Ahora resuelva usted solo las siguientes potencias de exponente negativo y explique los pasos que realiza hasta llegar al resultado.

$$(-0,2)^{-3} = \dots\dots\dots \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \dots\dots\dots$$

Al observar los ejemplos puede concluir que: la potencia de base racional distinta de cero y de exponente entero negativo es igual a otra potencia cuya base es el inverso multiplicativo de la base dada y el exponente de la nueva potencia es el opuesto del exponente (un entero positivo).



PENSAR

Definición

Sea $\frac{a}{b}$ un número racional (con b distinto de 0) y "n" un número entero, se define la potenciación como sigue:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}$, siendo n un número entero positivo o natural ($n > 1$) que indica el número de veces que hay que multiplicar el factor " $\frac{a}{b}$ " por sí mismo.

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = 1, \text{ siendo n un número entero negativo } (n < 0).$$



ACTIVIDADES

1- Calculen:

- a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \dots\dots\dots$ b) $\left(-\frac{12}{5}\right)^0 = \dots\dots\dots$ c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \dots\dots\dots$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \dots\dots\dots$

e) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \dots\dots\dots$ f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} = \dots\dots\dots$ g) $(-3)^{-3} = \dots\dots\dots$

2- Analicen las siguientes igualdades, detecten y corrijan el error que hay en cada una de ellas:

a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = (3)^2$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{9}$ c) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = -\frac{9}{25}$

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA POTENCIACIÓN CON RESPECTO A LA MULTIPLICACIÓN Y A LA DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

NOTAS

Situación 1

A continuación analizará si la potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación de números racionales. Le proponemos este análisis a través de ejemplos, para luego escribir la formalización. Complete con "=" (es igual) o con "≠" (no es igual) según corresponda:

$(2 \cdot 3) \approx \dots\dots\dots 2 \approx \cdot 3 \approx$. Es decir que se trata de determinar si el primer miembro es igual o bien no es igual al segundo miembro.

Antes de completar observe el segundo miembro ($2 \approx \cdot 3 \approx$) y exprese con sus palabras qué diferencias encuentra en relación al primer miembro. Observe que en este caso, en el segundo miembro, se ha distribuido el exponente a cada uno de los factores de la multiplicación de la base. Trabaje ahora completando cada uno de los cuadros y compare los resultados finales.

.....

$(2 \cdot 3) \approx =$

Calcule el producto del paréntesis y resuelva la potencia que queda:

$(2 \cdot 3) \approx = (\dots\dots) \approx = \dots\dots\dots$

Finalmente resulta:

$(2 \cdot 3) \approx = (6) \approx = 36$

$2 \approx \cdot 3 \approx =$

Resuelva la potencia que se indica en cada factor.

$2 \approx \cdot 3 \approx = \dots\dots \cdot \dots\dots$

Encuentre el producto que obtuvo.

$2 \approx \cdot 3 \approx = 4 \cdot 9 = \dots\dots\dots$

Resulta entonces:

$2 \approx \cdot 3 \approx = 4 \cdot 9 = 36$

Observe el resultado final que se obtuvo en cada cuadro. ¿Son iguales o no?

Entonces complete la línea punteada como corresponda: $(2 \cdot 3) \approx \dots\dots\dots 2 \approx \cdot 3 \approx$

y también es válida la expresión recíproca: $2 \approx \cdot 3 \approx = (2 \cdot 3) \approx$

Observe que en este caso, en el segundo miembro, se ha distribuido el exponente a cada uno de los términos de la suma algebraica.

Trabaje ahora completando cada uno de los cuadros y compare los resultados finales.

$(0,3 + 0,2 - 0,1)\Delta =$ Calcule la suma del paréntesis y resuelva la potencia. $(0,3 + 0,2 - 0,1)\Delta = (\dots)\Delta =$ Resulta entonces: $(0,3 + 0,2 - 0,1)\Delta = 0,064$	$0,3\Delta + 0,2\Delta - 0,1\Delta =$ Resuelva la potencia indicada en cada uno de los términos y luego resuelva la suma algebraica que obtiene. $0,3\Delta + 0,2\Delta - 0,1\Delta = 0,027 + \dots - \dots =$ Resulta entonces: $0,3\Delta + 0,2\Delta - 0,1\Delta = 0,034$
---	---

Si observa el resultado final obtenido en cada cuadro ¿son iguales o no?.....

Entonces complete la línea punteada:

$(0,3 + 0,2 - 0,1)\Delta \dots\dots\dots 0,3\Delta + 0,2\Delta - 0,1\Delta$

o también recíprocamente:

$0,3\Delta + 0,2\Delta - 0,1\Delta \neq (0,3 + 0,2 - 0,1)\Delta$

Aunque pruebe con otros números siempre llegará a la misma situación final, ya que la potenciación no es distributiva con respecto a la suma y resta de números racionales.

A modo de síntesis lea el siguiente cuadro en donde a, b, c son números racionales y n es un número entero:



La potenciación sí es distributiva respecto de la multiplicación de números racionales:

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. De aquí se desprende también la recíproca:
 $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

La potenciación sí es distributiva respecto de la división de

números racionales:

NOTAS

$(a : b)^n = a^n : b^n$, con $b \neq 0$. De aquí se desprende también la recíproca: $a^n : b^n = (a : b)^n$

La potenciación no es distributiva respecto de la suma ni la resta de números racionales:

$(a + b - c)^n \neq a^n + b^n - c^n$. De aquí se desprende también la recíproca: $a^n + b^n - c^n \neq (a + b - c)^n$

Es momento de detenernos para que usted relea y revise lo hecho. Le proponemos que realice una síntesis de lo abordado en potenciación de números racionales.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ACTIVIDADES



1. Escriba como potencias el siguiente producto:

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot (-3) = \dots\dots\dots$

b) $(-5) \cdot (-5) \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \dots\dots\dots$

2. Calcule las siguientes potencias.

a) $4^0 = \dots\dots\dots$;

b) $(-1,5)^1 = \dots\dots\dots$;

c) $7^{-2} = \dots\dots\dots$

d) $(-1,3)\Delta = \dots\dots\dots$;

e) $(-10)^{-5} = \dots\dots\dots$;

f) $\left(-\frac{6}{5}\right)^{-2} = \dots\dots\dots$

3) Andrea llega después de muchos años de vuelta a su pueblo y se encuentra con dos amigas. Después de 5 minutos de charla se despiden. A su vez estas dos amigas, cada una, le cuenta a otras dos amigas y al cabo de 5 minutos se despiden. Y así sucesivamente. Si esta situación se siguiera repitiendo cada cinco minutos, al cabo de 20 minutos, ¿cuántas amigas de Andrea sabrían que llegó (sugerencia: la representación gráfica de lo que ocurrió durante los 20 minutos le ayudará para luego realizar el cálculo correspondiente)?

4) Sofía desea retapizar su escritorio, que es de forma cuadrada. Ha recortado 20 fotos, de la misma forma y tamaño, de sus artistas y cantantes favoritos. Sabe que a lo largo y a lo ancho puede poner 5 fotos sin superponerlas. ¿Le alcanza el número de fotografías que tiene? Indique el número de fotos que le sobran o le faltan.

5) Resuelva aplicando la propiedad distributiva o la recíproca cuando sea posible.

a) $[3 \cdot (-2)]^{-2} = \dots\dots\dots$

b) $(-4)^3 \cdot (-1)^3 = \dots\dots\dots$

c) $(4 - 14)^3 = \dots\dots\dots$

d) $3^4 + 2^4 = \dots\dots\dots$

6) Le proponemos a continuación un desafío. Verifique si el resultado del siguiente cálculo es: -109 (una pequeña ayuda: identifique los términos, si aparecen).

$$2 \cdot 3 \approx + (4 - 7)\Delta - (2 \cdot 5) \approx =$$

Respuestas:

2. a) 1; b) -1,5; c) $\frac{1}{49}$; d) -2,197; e) $-\frac{1}{100000}$; f) $\frac{25}{36}$

3. 16 amigas

4. No le alcanzan por que le faltan 5 fotos.

5. a) 36; b) 64; c) -1000; d) 97.

RAÍZ DE UN NÚMERO RACIONAL



ACTIVIDADES

1. Le proponemos completar las líneas de puntos con números enteros positivos, en los casos que sea posible, para que sea cierta la igualdad.

a) $(\dots\dots)^4 = 16$

b) $(\dots\dots)^2 = 2$

c) $(\dots\dots)^2 = -81$

2) Le proponemos ahora completar las líneas de puntos con números enteros, en los casos que sea posible, para que sea cierta la igualdad.

a) $(\dots\dots)^3 = -27$

b) $(\dots\dots)^5 = 32$

c) $(\dots\dots)^3 = 10$

Situación 2

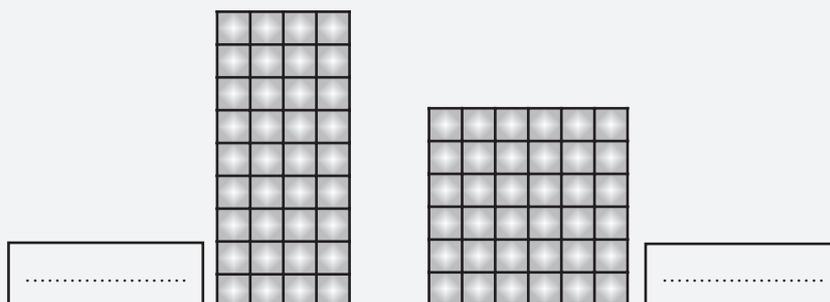
El señor González debe cubrir una pared de forma rectangular y otra de forma cuadrada. Cada una de las paredes las cubre con 36 cerámicos. ¿Cuántos cerámicos debe colocar en el largo y en el alto de la pared de forma cuadrada?

Responda

a) Si considera la pared de forma cuadrada, ¿qué relación debe existir entre el número de cerámicos que coloca para cubrir el largo y el número de cerámicos que coloca para cubrir el alto de la pared?

.....

b) Complete cada cuadro de la representación con el número de cerámicos que son necesarios para cubrir cada una de la paredes representadas gráficamente y con la forma de cada una de ellas.



c) Observe la pared con forma cuadrada (la segunda figura de la representación) y responda:

¿Qué número de cerámicos debe colocar para cubrir el largo?

¿Qué número de cerámicos debe colocar para cubrir el alto?

¿Cuál es la cantidad total de cerámicos necesarios para cubrir toda la pared?

Escriba qué hizo para hallar esa cantidad

.....

.....

NOTAS

Ahora le proponemos revisar juntos sus respuestas.

Si realiza un análisis más detenido de la situación 1, 1) y 2) podrá observar que lo que se pide en cada uno de los casos es encontrar la base de cada una de las potencias dadas.

Para encontrar la base de una potencia, posiblemente usted, para cada caso, se ha preguntado lo siguiente:

Para el punto 1) en la expresión a): ¿qué número entero positivo elevado a la cuarta da 16? O también puede plantearse: ¿qué número entero positivo multiplicado cuatro veces por sí mismo da por resultado 16? El número entero positivo que satisface estas condiciones es 2, porque $2^4 = 16$.

Para la expresión b): ¿qué número entero positivo elevado al cuadrado da 2? O también puede preguntarse ¿Qué número entero positivo multiplicado dos veces por sí mismo es 2? Si piensa, detenidamente coincidirá que no existe ningún número entero positivo multiplicado dos veces por sí mismo que sea igual a dos. Por lo que este punto no es posible resolverlo.

Para la expresión c): ¿qué número entero positivo elevado al cuadrado da -81? O también puede plantearse: ¿qué número entero positivo multiplicado dos veces por sí mismo da por resultado -81? En este punto ocurre algo parecido, no existe ningún número entero positivo que elevado al cuadrado dé por resultado -81 ya que la potencia de exponente cuadrado es siempre un número positivo. Por lo que este punto no es posible resolverlo.

Para el punto 2) en la expresión a): ¿qué número entero elevado al cubo da -27? El número entero que cumple esta condición es -3, porque $(-3)^3 = -27$.

Para la expresión b): ¿qué número entero elevado a la quinta

NOTAS

da 32? El número entero que cumple esta condición es, porque si resuelve la potencia 2^5 obtiene

Por último, para la expresión c): ¿qué número entero elevado al cubo da 10? Seguramente ha estado meditando y no pudo encontrar ningún número entero que multiplicado tres veces por sí mismo dé por resultado 10.

A partir de la revisión de las respuestas de la situación 1 a) y b), se observa que no siempre es posible encontrar una respuesta a las preguntas que se han formulado.

En la situación 2 se observa que si la pared tiene forma cuadrada el número de cerámicos con que se cubre el alto es igual al número de cerámicos con los que se cubre el largo, o sea 6. Son necesarios 6 cerámicos en cada caso; se necesitan 6 hileras de 6 cerámicos para cubrir la totalidad de la pared.

Estas dos situaciones propuestas están vinculadas con un tema matemático que es la radicación de números enteros. Por ejemplo, cuando se pregunta: ¿qué número entero positivo multiplicado cuatro veces por sí mismo es igual a 16?

En aritmética, este interrogante se escribe simbólicamente así: $\sqrt[4]{16}$ (se lee: "raíz cuarta de 16 es igual a") y la respuesta a la pregunta planteada es 2; es decir que 2 es el resultado de la raíz cuarta de 16. Si usted expresa en símbolos matemáticos lo que hemos escrito queda: $\sqrt[4]{16} = 2$.

Si utilizamos esta nueva notación, ¿cómo escribiría el resto de las expresiones de la situación 1?

En el punto 1:

b) $(\dots) \approx 2$. Usted puede preguntarse: ¿qué número al cuadrado da 2? O bien: ¿la raíz cuadrada de 2 a qué es igual? Por lo que en símbolos obtendría: $(\dots) \approx 2 \rightarrow \sqrt{2} = \dots$, que como antes se indicó no tiene una solución en el conjunto de los números enteros.

En c) puede expresarse en forma equivalente como $\sqrt{-81}$, que ya sabe que no es posible resolverlo.

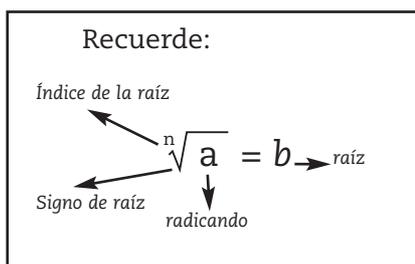
Resuelva de la misma forma el punto 2).

1. $\sqrt[3]{-27} =$

2. $\sqrt[5]{32} =$

3. $\sqrt[3]{10} =$

En la situación 2, para responder ¿cuántos cerámicos son necesarios colocar en el largo y en el alto de la pared cuadrada?, se



NOTAS



PENSAR

En general, si se considera que "a" es un número racional y "n" es un número entero mayor a 1, se puede definir:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si se cumple que } b^n = a.$$

Se lee: *la raíz enésima de un número racional "a" es un número racional "b" si cumple que "b" elevado a la "n" es igual a "a".*

Para complementar la definición anterior hay que considerar lo siguiente:

- Si n (índice de la raíz) es **par**, la raíz está definida para números racionales positivos. Así:

$\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$; siendo a y b números mayores o iguales a cero.

- Si n (índice de la raíz) es **impar**, la raíz está definida así:

$\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$; siendo a y b números racionales.

- No siempre la raíz enésima de un número racional es otro número racional.

- Si n (índice de la raíz) es **par**, la raíz de un número negativo no es un número real. Ya que no existe ningún número racional o irracional que multiplicado "n veces" por sí mismo (siendo n par) dé un número negativo.



ACTIVIDADES

1. A continuación, teniendo en cuenta la definición de radicación, calculen las siguientes raíces. Se analizarán algunos ejemplos y ustedes analizarán otros, completando lo que falte.

a) $\sqrt[5]{32} = 2$ porque se cumple que $2^5 = 32$

b) $\sqrt[3]{27} = \dots\dots\dots$ porque se cumple que $\dots\dots\dots$

c) $\sqrt[3]{-1} = -1$ porque se cumple que $(-1)^3 = -1$

d) $\sqrt[3]{(-32)} = -2$ porque se cumple que $\dots\dots\dots$

e) $\sqrt{25} = 5$ porque se cumple que $\dots\dots\dots$

f) $\sqrt[4]{16} = \dots\dots\dots$ porque se cumple que $2^4 = \dots\dots\dots$

g) $\sqrt[3]{(-25)} = \dots\dots\dots$

2. A partir de los resultados obtenidos analicen:

a) Observen los ejemplos. ¿Cuáles corresponden a raíces en las que el índice de la raíz es un número entero mayor a 1 e **impar** y el radicando es un número racional **positivo**?

.....

En casos con estas características (1 y 2), ¿la raíz o resultado que obtuvo qué signo tiene?

Podemos concluir que:

NOTAS

• si el índice de una raíz es un número entero mayor a 1 e **impar** y el radicando es un número racional **positivo**, la raíz o resultado será **positivo**.

.....

b) Observen los ejemplos. ¿Cuáles corresponden a raíces en las que el índice de la raíz es un número entero mayor a 1 e **impar** y el radicando es un número racional **negativo**?

.....

.....

En casos con estas características (3 y 4), ¿la raíz o resultado que obtuvo qué signo tiene?

.....

.....

Podemos concluir que:

• si el índice de una raíz es un número entero mayor a 1 e **impar** y el radicando es un número racional **negativo**, la raíz o resultado será **negativo**.

.....

c) Observen los ejemplos. ¿Cuáles corresponden a raíces en las que el índice de la raíz es un número entero mayor a 1 **par** y el radicando es un número racional **positivo**?

.....

.....

En casos con estas características (5 y 6), ¿la raíz o resultado que obtuvo qué signo tiene?

.....

.....

Podemos concluir que:

• si el índice de una raíz es un número entero mayor a 1 **par** y el radicando es un número racional **positivo**, la raíz será **positiva**.

.....

d) Observen nuevamente los ejemplos. ¿Cuáles corresponden

NOTAS

a raíces en las que el índice de la raíz es un número entero mayor a 1 **par** y el radicando es un número racional **negativo**?

En casos con estas características (7), ¿la raíz o resultado existe?

Podemos concluir que:

- si el índice de una raíz es un número entero mayor a 1 par y el radicando es un número racional negativo, no existirá la raíz o resultado.

A partir de este análisis ustedes pueden, ahora, utilizar la regla de signos que hay que considerar al resolver una raíz.



PENSAR

¿i el índice de una raíz es un número entero mayor a 1 par y el radicando es un número racional positivo, la raíz será positiva.

- Si el índice de una raíz es un número entero mayor a 1 e impar y el radicando es un número racional positivo, la raíz o resultado será positivo.
- Si el índice de una raíz es un número entero mayor a 1 e impar y el radicando es un número racional negativo, la raíz o resultado será negativo.
- Si el índice de una raíz es un número entero mayor a 1 par y el radicando es un número racional negativo, no existirá la raíz o resultado.

Lean nuevamente el cuadro y respondan: ¿cuál es el único caso en el que el resultado de una raíz es un número negativo?

Consideren que: si a y b son dos números enteros con b distinto de cero y n entero mayor a 1, se puede expresar:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \text{ si se cumple que } \left(\frac{c}{d}\right)^n = \frac{a}{b}$$

NOTAS

cocientes, potencias y raíces de números racionales.

Estos cálculos reciben el nombre de **cálculos combinados**.

Le mostramos a continuación uno de estos cálculos ya resuelto para que lo analice y luego resuelva los otros que le proponemos.

Para realizar el siguiente cálculo: $2 \cdot \sqrt[3]{-8} + 15 : 3 - 2 \cdot 3 = \dots\dots\dots$, usted puede leer el cálculo e identificar los términos. Recuerde que los símbolos de suma y resta separan términos. De esta manera señale cada término con un arco, como se muestra a continuación.

$$2 \cdot \sqrt[3]{-8} + 15 : 3 - 2 \cdot 3 = \dots\dots\dots$$

Luego, ¿qué le parece que hay que hacer?

Seguramente coincidirá en que es necesario resolver cada uno de los términos, prestando atención a los signos que los separan, los que usted tendrá que conservar hasta llegar a una suma algebraica que resolverá para llegar al resultado final. Recuerde también que al resolver cada término deberá considerar los signos de los números de cada uno.

Observe todo el cálculo resuelto:

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot \sqrt[3]{-8} + 15 : 3 - 2 \cdot 3 = \\
 & \overbrace{2 \cdot \sqrt[3]{-8}} + \overbrace{15 : 3} - \overbrace{2 \cdot 3} = \\
 & 4 \cdot (-2) + 5 - 6 = \\
 & -8 + 5 - 6 = \\
 & 5 - (8 + 6) = \\
 & 5 - 14 = -9
 \end{aligned}$$



ACTIVIDADES

1. Ahora resuelva usted los cálculos que se dan a continuación y registre a la derecha de los mismos los pasos que siguen en cada caso para llegar al resultado final.

a) $\sqrt{25} : 5 - 2 \approx : (-4) + 3 \cdot 2 =$

b) $\sqrt[3]{(-8)} \cdot \sqrt{16} + 18 : (-2) - 3\Delta =$

c) $3\Delta : 3 \approx - \sqrt[5]{(-32)} \cdot 4 - 2 \cdot (-5) \approx =$

Respuestas:
a) 8; b) - 44; c) -39

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

NOTAS

A través del estudio que usted está realizando en matemática seguramente habrá notado que ciertas expresiones, sobre todo cuando hemos "formalizado", las hemos expresado con palabras y esas mismas palabras, luego, las hemos expresado en símbolos específicos de la matemática. Decimos que hemos usado distintos "lenguajes".

En matemática se emplean distintos lenguajes. Algunos de ellos, de los cuales nos ocuparemos ahora, son:

- **Lenguaje coloquial:** es el lenguaje que usamos cotidianamente para expresarnos en forma verbal (ya sea oralmente o por escrito). Está formado por las palabras del idioma que hablamos.

Se emplea lenguaje coloquial cuando expresamos:

- "El triple de la edad de Martina es veinticuatro años".
- "Federico tiene tres años más que Santiago".
- "El doble de la altura del hijo es la del padre".
- "El triple de un número".
- "El doble del anterior de un número".
- "Tiene una edad mayor a dieciocho años".
- "El cuadrado de un número".

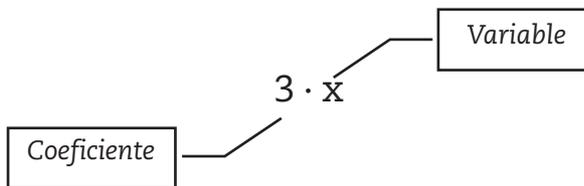
- **Lenguaje simbólico o algebraico:** es el lenguaje que usa símbolos específicos de la matemática y letras (que utilizamos para representar números desconocidos).

Por ejemplo, las expresiones anteriores quedarían expresadas en lenguaje algebraico así:

- " $3 \cdot m = 24$ ", siendo m la letra que representa la edad de Martina.
- " $f = 3 + s$ ", donde f representa la edad de Federico y s la edad de Santiago.
- " $2 \cdot h = p$ ", donde h y p representan las alturas del hijo y del padre respectivamente.
- " $3 \cdot x$ ", siendo x la letra que representa un número.
- " $2 \cdot (x - 1)$ ", donde x representa, en este caso, un número y al restarle uno (x-1) se obtiene el número anterior a dicho número.
- " $x > 18$ ", donde x es la edad.
- " $x \approx$ ", donde x representa un número.

Estas expresiones, en las que aparecen números y letras que pueden representar distintos objetos o situaciones (edad, un número, medida de la altura), planteadas en un lenguaje coloquial se llaman expresiones algebraicas. En ellas intervienen números y letras, relacionados mediante símbolos específicos ($<$, $>$, $=$, \cdot , $:$) y, generalmente, surgen de la traducción de un lenguaje coloquial a un lenguaje simbólico.

NOTAS



En las expresiones algebraicas las letras reciben el nombre de **variables** o **parte literal de la expresión** y pueden ser reemplazadas por **distintos números** y los números que acompañan a esas variables se llaman **coeficientes**.

Advierta que una expresión algebraica debe tener el mismo significado que la expresión coloquial. Resaltando esta característica, que es importante para temas futuros, es que le proponemos las siguientes actividades.



ACTIVIDADES

1. Analicen si las siguientes expresiones dadas en distintos lenguajes tienen un mismo significado. En caso de no tener el mismo significado señalen la opción con una cruz y escriban la expresión correcta.

"Se considera x la edad de Julio"

Opción	Lenguaje coloquial	Lenguaje algebraico	Respuesta
1	La edad de Julio dentro de tres años	$x + 3$	
2	El doble de la edad de Julio	$2 \cdot x$	
3	La tercera parte de la edad de Julio	$3 \cdot x$	
4	El doble de la edad de Julio dentro de tres años	$2 \cdot (x + 3)$	
5	Lo que le falta a Julio para tener 50 años	$50 + x$	
6	La edad de Julio hace 15 años	$x - 15$	

Seguramente las situaciones que señalaron -que no tienen un mismo significado -son las opciones 3 y 5, cuyas expresiones correctas son: $\frac{1}{3} \cdot x$ o $\frac{x}{3}$ para la primera y $50 - x$ para la segunda.

2. Escriban en lenguaje algebraico:

- la mitad de un número.

- la tercera parte del sueldo.
- la quinta parte del trabajo.
- la dos terceras partes del personal.
- la cuarta parte de la mitad del recorrido.

3. Completen la expresión en lenguaje coloquial de las siguientes expresiones algebraicas, suponiendo que **b** es el dinero ahorrado por Luis.

- a) $3b$ El triple del dinero
- b) $b + 60$ por Luis aumentado en 60 pesos
- c) $2b + 36$ El doble del dinero ahorrado por Luis
- d) $\frac{1}{4}b + \frac{2}{3}b$ Un cuarto del dinero ahorrado por Luis reunido con

Otros ejemplos de expresiones algebraicas son:

NOTAS

- $3x + 3$
- $2a - 4$
- $2a + 4a - 2b$

En la última expresión algebraica observen el primer y segundo término, ¿cómo es la parte literal de cada uno de ellos?

.....

.....

.....

Se dice que son términos semejantes: $2a$ y $4a$: pues tienen la misma letra o parte literal. Cuando esto ocurre la expresión algebraica puede expresarse de manera equivalente como:

.....

.....

.....

$$2a + 4a - 2b = 6a - 2b$$

Si observan, podrán ver que se sumaron los números que aparecen a la izquierda de "a" en cada término, es decir los coeficientes 2 y 4 ($2 + 4 = 6$).

Si se tiene la expresión algebraica: $3b + 2s - 5b$ ¿tiene dicha expresión términos semejantes? ¿Cuáles?

¿Cómo expresarían en forma más simple dicha expresión algebraica?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Puede expresarse sumando los coeficientes o números de los

NOTAS

términos semejantes con parte literal **b**, de la forma siguiente:

$$3b + 2s - 5b = -2b + 2s$$

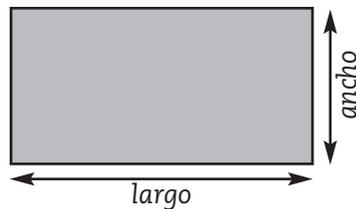
(3-5 = -2)

Procedan de manera similar que en los dos ejemplos anteriores y escriban las siguientes expresiones de forma más simple:

- $3x + 2x = \dots\dots\dots$
- $3a - 5b + 2b - 6a = \dots\dots\dots$
- $2x - 3y + 6x = \dots\dots\dots$

Algunas expresiones algebraicas son empleadas en el proceso de medición de cantidades de longitud, cantidades de superficie y en fórmulas de otras disciplinas como en ciencias naturales. Para profundizar este tipo de aplicación analicemos un ejemplo:

- Para calcular la medida de la cantidad de longitud del contorno de ciertos polígonos (el perímetro del polígono), como el del siguiente rectángulo del que se sabe que su largo es igual al doble de su ancho.



RECORDAR

Si en lenguaje coloquial se expresa que: "el largo del contorno de un objeto de forma rectangular es de ocho metros", se está haciendo referencia a una **cantidad de longitud**, que en lenguaje simbólico escribimos: 8m. En esta expresión decimos que **8 es la medida del largo del contorno del rectángulo**, u 8 es la medida de la cantidad de longitud del contorno. Expresión que solemos abreviar diciendo: *8 es la medida del contorno del rectángulo*.

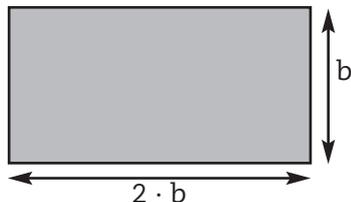
Como no se conoce ninguna información de las medidas del largo y del ancho se puede suponer que la medida del ancho del mismo es **b**, entonces, ¿cómo expresarían la medida del largo?

.....

Si a la medida del ancho se lo simboliza con "**b**", entonces la

medida del largo, como es el doble de la medida del ancho, se puede simbolizar así: " $2 \cdot b$ ".

Si ubica las expresiones en el gráfico se tiene:



Luego, para calcular el perímetro del cuadrilátero primero se expresa simbólicamente como la suma de las medidas de sus lados (o la suma de las medidas de la cantidad de longitud de sus lados), obteniéndose la siguiente expresión algebraica:

$2 \cdot b + b + 2 \cdot b + b$ y como todos los sumandos son términos semejantes (poseen la misma letra o parte literal), ¿qué expresión equivalente, más simple, pueden obtener? Escribanla.

$2 \cdot b + b + 2 \cdot b + b = \dots\dots\dots$

Esta expresión algebraica final $6 \cdot b$, donde b es la medida de la cantidad de longitud del ancho del rectángulo, facilita el cálculo del perímetro de cualquier terreno de forma rectangular o de cualquier otro objeto que tenga dicha forma y en el que se verifique que "el largo es el doble del ancho".

Así, si les dicen que un terreno con estas características (el largo es el doble del ancho) tiene 80 metros de ancho, ¿cuál es el perímetro del mismo? Muestren cómo harían usando la expresión algebraica obtenida antes, para encontrar dicho perímetro.

.....

Al responder a esta pregunta seguramente hallaron 480, reemplazando, en la expresión algebraica $6 \cdot b$, la b por 80. Es decir, que la cantidad de longitud del contorno del terreno es de 480 metros y que el perímetro es de 480 (el perímetro es la medida, el número).

¿Cuál será la cantidad de longitud del contorno del terreno si el ancho es ahora de 120 metros?

.....

¿Cuál será la cantidad de longitud del contorno del terreno si el ancho es ahora de 97 metros?

.....

Observen que:
 $b = 1 \cdot b$, entonces la expresión $2 \cdot b + b + 2 \cdot b + b$ puede expresarse $2 \cdot b + 1 \cdot b + 2 \cdot b + 1 \cdot b$ y sumando los números o coeficientes que acompañan a la letra b en cada término se tiene $(2 + 1 + 2 + 1 = 6)$ por lo que la expresión final queda: $6 \cdot b$

NOTAS

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Valor numérico de una expresión algebraica

Cuando en la situación anterior se reemplazó b por 80 se obtuvo un número (480). Antes de este reemplazo se tenía una expresión algebraica $(6 \cdot b)$. A este número, que se obtiene al reemplazar la variable o parte literal de una expresión algebraica, se lo llama **valor numérico** de la expresión.

cuadrado



Cuadrilátero con lados y ángulos congruentes (de igual medida).

La siguiente expresión algebraica permite encontrar el perímetro de una figura con forma de **cuadrado**: $l \cdot 4$, siendo l la medida de la longitud de un lado del cuadrado.



NOTAS

Completar la siguiente tabla encontrando el valor numérico de la expresión algebraica: $l \cdot 4$.

l	Valor numérico - Perímetro del cuadrado
12	
2,7	
21,8	



PENSAR

En general, cuando la variable o las variables que intervienen en una expresión algebraica son reemplazadas por un número, el valor que se obtiene se llama **valor numérico de la expresión algebraica**.

También se emplean expresiones algebraicas para expresar fórmulas de la física que muestran relaciones entre variables. Por ejemplo, la fórmula que expresa la relación entre la rapidez de un móvil (v), la distancia recorrida por el mismo (d) y el tiempo empleado en recorrerla (t) está dada por: $v = \frac{d}{t}$.

Esta fórmula permite calcular la rapidez o el módulo de la velocidad, conocidas la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla. Así, si un avión recorre una distancia de 2.880 km en 4 horas, la rapidez del avión se obtiene encontrando el valor numérico de la expresión algebraica $v = \frac{d}{t}$, para $d = 2.880$ y $t = 4$.

Si reemplaza estos números en la expresión algebraica

encontrará el valor buscado.

Así se tiene: $v = \frac{d}{t} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

Es decir que la rapidez del avión es de 720 km/h.



ACTIVIDADES

- a) Encontrar la rapidez de un avión que recorre 4.500 km. en 5 horas.
- b) Encontrar la rapidez de un auto que recorre 450 km. en 6 horas.

Una misma expresión algebraica puede tener más de un valor numérico dependiendo del valor que se le asigne a las variables o a la parte literal.

Así, por ejemplo, considerando la expresión algebraica: $3 \cdot x + 5$, para hallar el valor numérico cuando x toma el valor 2, se reemplaza la x por 2 y se resuelve. El valor que se obtiene es el llamado valor numérico.

Hágalo usted mismo y obtenga el valor numérico correspondiente:

$3 \cdot x + 5 = 3 \cdot \dots\dots\dots + 5 = \dots\dots\dots + 5 = \dots\dots\dots$

Es decir que el valor numérico de la expresión algebraica para $x = 2$ es 11.

Pero si se quiere hallar, ahora, el valor numérico de la misma expresión pero para $x = \frac{5}{6}$, se procede de manera similar. Reemplace x y resuelva:

$3 \cdot x + 5 = 3 \cdot \dots\dots\dots + 5 = \frac{5}{2} + \frac{\dots\dots\dots}{2} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$

Luego, el valor numérico de la expresión algebraica, cuando $x = \frac{5}{6}$, es $\frac{15}{2}$.

Nota:
 Primero se resuelve el producto y luego se simplifica, dividiendo denominador y numerador por 3, en este caso.

$$3 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

Hay otras expresiones algebraicas conocidas por usted que son las ecuaciones. Las ecuaciones son igualdades de expresiones algebraicas donde hay una o más variables llamadas incógnitas que se simbolizan con letras. Por ejemplo, la expresión $5x + 3 = 2x$ es una ecuación. Más adelante abordaremos el tema "ecuaciones" con mayor detalle.

OPERACIONES SENCILLAS CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Analice cada una de las siguientes situaciones.

Situación 1

Suponga que conoce la siguiente información sobre las

NOTAS

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

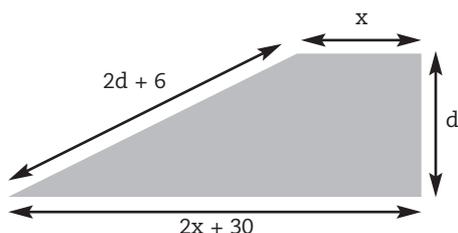
.....

.....

.....

NOTAS

medidas de los límites de un terreno que tiene la forma de un trapecio:



Si se le pide que exprese de alguna manera el perímetro del terreno posiblemente escribirá alguna expresión equivalente a:

$$2d + 6 + x + d + 2x + 30$$

Observe la expresión. ¿Es una expresión algebraica?, ¿por qué?

La expresión algebraica está formada por seis términos, dos de ellos numéricos y el resto combinaciones de números y letras. ¿La expresión tiene términos semejantes (igual parte literal o con la misma letra)? ¿Cuáles?

Los términos semejantes que identificó pueden ser asociados y expresados de manera más sencilla, sumando o restando la parte numérica de cada uno de los términos. Observe esto en las siguientes expresiones:

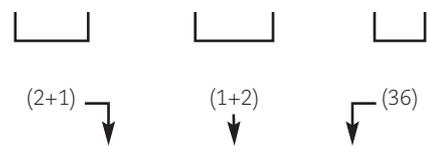
La expresión se puede

$$(2d + d) + (x + 2 \cdot x) + (6 + 30) =$$

formular en forma equivalente, al sumar

$$(2 \cdot d + 1 \cdot d) + (1 \cdot x + 2 \cdot x) + (6 + 30) =$$

la parte numérica de las expresiones semejantes.



Y así la expresión final es:

$$3 \cdot d + 3 \cdot x + 36 =$$

Esta expresión algebraica, que es más simple que la expresión algebraica inicial, permite encontrar el perímetro del terreno conociendo los valores de las variables d y x . Observe que esta expresión se obtuvo al realizar sumas con expresiones algebraicas.

En situaciones de la vida cotidiana con frecuencia trabajamos con expresiones algebraicas semejantes. Un ejemplo puede ser la siguiente situación:

Situación 2

NOTAS

Al organizar una fiesta familiar es común contar cuántos invitados vendrán, para lo cual reunimos mentalmente los integrantes de cada familia. Pero también necesitamos saber cuántas empanadas encargar, cuántas gaseosas comprar. También es importante conocer cuánto dinero se necesitará para realizar las compras; en este caso las empanadas y las gaseosas.

En una situación de este tipo no se nos ocurre sumar el número de invitados con el número de empanadas ni con el número de gaseosas. Si se utiliza lenguaje algebraico, al número de invitados, de empanadas y de gaseosas se los representa con distintas letras. Por ejemplo se adopta:

$i \longrightarrow$ representa el número de invitados.

$g \longrightarrow$ representa el número de pesos que cuesta cada una de las gaseosas.

$e \longrightarrow$ representa el número de pesos que cuesta cada docena de empanadas.

¿Cómo se puede resolver una situación similar si partimos de los siguientes datos: si hay 20 invitados, se encargan 4 docenas de empanadas y se compran 13 gaseosas.

La expresión algebraica que representa cuántos pesos hay que tener para realizar las compras en esta situación es:

$$13 \cdot g + 4 \cdot e$$

Pero a la reunión se agregan 12 invitados: hay que comprar 6 gaseosas y encargar 3 docenas de empanadas más. Ante esta circunstancia la expresión algebraica que representa el total de gastos en compras, de gaseosas y empanadas de esta nueva situación es:

$$13 \cdot g + 4 \cdot e + 6 \cdot g + 3 \cdot e$$

Pero lo que se quiere averiguar es cuántos pesos se gastarán en realizar las compras. Observando la expresión algebraica se puede resolver la suma de expresiones algebraicas semejantes, así se obtiene una expresión más simple.

En la vida cotidiana lo que se hace es sumar al número de invitados inicial, el número de invitados que se agregan; lo mismo con el número de gaseosas y con el número de docenas de empanadas. Esta manera de resolver la situación desde lo cotidiano tiene su paralelo desde lo aritmético -que usted ya conoce- y el procedimiento a seguir se explica a continuación:

NOTAS

Para resolver la suma de expresiones algebraicas obtenida:

$$13 \cdot g + 4 \cdot e + 6 \cdot g + 3 \cdot e$$

Se asocian los términos semejantes (los que tienen la misma parte literal o letra) y queda:

$$(13 \cdot g + 6 \cdot g) + (4 \cdot e + 3 \cdot e)$$

Se suman los números de los términos semejantes y se obtiene de cada uno de ellos otro término que tiene la misma parte literal y el número o coeficiente es la suma de los coeficientes: $(13 + 6)$ y $(4 + 3)$

$$19 \cdot g + 7 \cdot e$$

El resultado obtenido: $19 \cdot g + 7 \cdot e$ significa que para la reunión se necesitan comprar 19 gaseosas que cuestan \$g cada una y 7 docenas de empanadas que cuestan \$e cada docena.

En matemática no interesa qué representan las letras, sólo se considera y estudia cómo trabajar con expresiones algebraicas y, al aplicarse luego a situaciones cotidianas, se les dará un significado a las letras, como en este caso. Así si se sabe que el precio de cada una de las gaseosas a comprar es de \$2,50 ($g = 2,50$) y que el precio de cada docena de empanadas es de \$3,50 ($e = 3,50$), ¿cuántos pesos costará realizar la compra de gaseosas y empanadas para la fiesta familiar?



PENSAR

Para sumar o restar expresiones algebraicas hay que tener en cuenta que sólo se pueden sumar o restar términos semejantes (que tienen la misma parte literal) y el resultado es otra expresión algebraica con la misma parte literal pero donde número o coeficiente que acompaña a la letra es la suma o resta de los coeficientes, según corresponda.

Ejemplos:

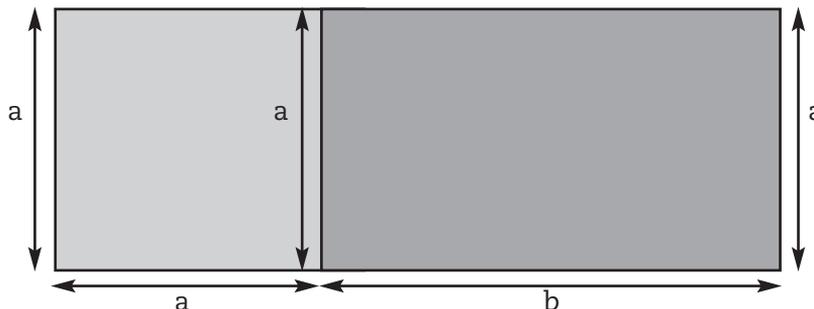
- $x + x \approx$: estos dos términos no se pueden sumar por no ser semejantes.
- $x + b$: estos dos términos no se pueden sumar por no ser semejantes
- $8x - 2x = 6x$: (ocho menos dos es seis).
- $5y + 8y - 2z = 13y - 2z$.

Nota: conviene tener presente que el signo de multiplicación no suele ponerse entre las letras y coeficientes o números en una expresión algebraica:

$$8 \cdot x = 8x$$

NOTAS

Si se ubica la información anterior en el gráfico resulta más sencilla la resolución del problema pedido. Observe cómo se ha ubicado la información:



Le mostramos dos opciones para resolver este problema. Lea y analice cada una de ellas:

Opción 1	Opción 2
<p><i>Pensar en dos terrenos por separado y encontrar:</i></p> <p>1°- <i>la medida de la superficie del terreno 1 de forma cuadrada.</i></p> <p>2°- <i>la medida de la superficie del terreno 2 de forma rectangular.</i></p> <p>3°- <i>la suma de ambas medidas para así obtener la medida de la cantidad de superficie total a comprar.</i></p>	<p><i>Pensar en un único terreno (terreno unificado) y encontrar:</i></p> <p>1°- <i>la medida del lado más largo del terreno unificado.</i></p> <p>2°- <i>la medida de la cantidad de superficie del terreno unificado o terrenos a comprar.</i></p>

Según lo que usted interpreta, siguiendo ambas opciones, ¿se llega a un mismo resultado o bien a expresiones que deben ser equivalentes? ¿Por qué?

Resuelva cada una de las opciones para obtener de esta forma las expresiones algebraicas correspondientes a cada una de ellas.

Le proponemos que siga las indicaciones que se dan en el cuadro a continuación para llegar a dichas expresiones:

NOTAS

Desarrollo de la opción 1	Desarrollo de la opción 2
<p>1°- la medida de la cantidad de superficie del terreno de forma cuadrada se obtiene al reemplazar en la siguiente expresión, la medida del lado, que en este caso es "a". Reemplace:</p> $ l \cdot l = l ^2 = \dots \approx$ <p>2°- la medida de la cantidad de superficie del terreno 2 (de forma rectangular) se obtiene al reemplazar, en la expresión siguiente, las medidas de la base y de la altura del rectángulo que representan al terreno 2.</p> <p>¿Cuál es la medida de la base de dicho rectángulo?</p> <p>.....</p> <p>¿Cuál es la medida de la altura del mismo?</p> <p>.....</p> <p>Reemplace dichas medidas en la expresión:</p> $ b \cdot h = \dots \cdot \dots$ <p>3°- La medida de la cantidad de superficie total se obtiene al sumar las expresiones obtenidas en los dos puntos anteriores, que indican las medidas de las cantidades de superficie de cada uno de los terrenos (1 y 2), y es:</p> $a^2 + a \cdot b$	<p>1°- Imagine un único terreno donde "a" es la medida de la base del cuadrado que representa al terreno de forma cuadrada y "b" es la medida de la base del rectángulo que representa el terreno de forma rectangular.</p> <p>¿Cuál es la expresión de la medida del lado más largo del terreno unificado?</p> <p>.....</p> <p>¿Cuál es la medida de la altura del rectángulo que representa el terreno unificado?</p> <p>.....</p> <p>2°- Para encontrar la medida de la cantidad de superficie del terreno unificado se debe reemplazar, en la siguiente expresión, los valores que se obtuvieron en el punto anterior, es decir a + b y a . Reemplace:</p> $ b \cdot h = \dots \cdot \dots$ <p>Es decir que la medida de la cantidad de superficie total es:</p> $a \cdot (a+b)$

Conclusión

La medida de la superficie total de los dos terrenos puede expresarse de dos maneras distintas.

Si usted aplica la propiedad distributiva en la segunda expresión verificará que las dos expresiones son equivalentes.

Esto nos permite decir que la medida de la superficie se

NOTAS

puede calcular de una u otra manera. Podemos, entonces, escribir la siguiente igualdad:

$$a \approx + a \cdot b = a \cdot (a+b)$$

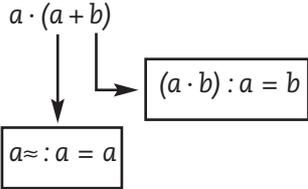
Esta igualdad recibe el nombre de **identidad**.

Si analiza desde el punto de vista geométrico la identidad puede observar que:

- En el primer miembro hay una suma de las áreas de un cuadrado cuyo lado mide a y de un rectángulo cuyos lados miden a y b , respectivamente.

- En el segundo miembro tenemos el área de un rectángulo que se obtiene de considerar las dos figuras unidas y cuyos lados miden respectivamente a y $(a + b)$.

Si analiza la identidad desde el punto de vista algebraico, verá que se puede obtener a partir de la primera expresión o primer miembro de la identidad el segundo miembro. Observe:

<p>La expresión inicial o primer miembro de la identidad, ¿cuántos términos tiene?</p> <p>.....</p>	$a \approx + a \cdot b$
<p>¿Cuál es la letra o parte literal que se repite en ambos términos de la expresión?</p> <p>.....</p> <p>A la expresión que se repite, en este caso a, se la llama factor común.</p>	$\underline{a} \approx + \underline{a} \cdot b \text{ o bien } a \cdot a + a \cdot b$
<p>La expresión anterior también puede escribirse de manera equivalente como un producto donde el primer factor es el llamado factor común, en este caso, a, y el segundo factor es una expresión algebraica (entre paréntesis) que se obtiene de hacer la división entre cada término de la expresión inicial y el factor común a. Así como $a \approx : a = a$ y $a \cdot b : a = b$, se obtiene la expresión que está en el cuadro de la derecha:</p>	

NOTAS

<p>Para verificar que al sacar el factor común no se ha cometido un error, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma o resta (según corresponda) y se debe obtener la expresión inicial. Observe esta verificación en el cuadro de la derecha.</p>	$a \cdot (a+b) = a \cdot a + a \cdot b = a^2 + a \cdot b$
---	---

En casos como éste se dice que para obtener el segundo miembro se saca factor común. En este caso el factor es "a". Observe que el procedimiento de extraer o sacar factor común es un procedimiento inverso al de aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o resta.

Analice las siguientes situaciones en las que se ha extraído un factor común en cada una de ellas, lea y observe con mucha atención los pasos seguidos:

Situación 1

El factor común es la parte literal.

<p>La expresión inicial es:</p>	$\frac{1}{4}x + 3x + 2x$
<p>¿Cuál es el factor que se repite en todos los términos de la expresión?</p>	$\frac{1}{4}\underline{x} + 3\underline{x} + 2\underline{x}$
<p>Extraiga el factor común x y exprese el producto que obtiene. Recuerde que uno de los factores es x y el otro factor se obtiene de dividir por x a la expresión inicial. Complete el cuadro de la derecha.</p>	$x \cdot (\dots + \dots + \dots)$
<p>Se pueden escribir las dos expresiones anteriores como una identidad:</p>	$\frac{1}{4}x + 3x + 2x = x \cdot \left(\frac{1}{4} + 3 + 2 \right)$
<p>Realice la verificación correspondiente, aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma o resta. Aplique la propiedad y verifique si llega a la expresión inicial.</p>	$x \cdot \left(\frac{1}{4} + 3 + 2 \right) = \dots\dots\dots$

NOTAS

Ahora le proponemos una situación similar para extraer el factor común:

Si la expresión inicial es $2 \cdot a + 5 \cdot a - 9 \cdot a + a =$

¿Cuál es el factor que se repite en cada término de la expresión anterior?

Observe que el último término de la expresión algebraica coincide en su totalidad con el factor común. Entonces al extraerlo se coloca 1 en el último término de la expresión entre paréntesis correspondiente al segundo factor.

Extraiga el factor común y complete:

$$2 \cdot a + 5 \cdot a - 9 \cdot a + \textcircled{a} = a \cdot (2 + \dots - \dots + \textcircled{1}) = a \cdot \dots$$

Como el factor común coincide con el término se coloca 1 al extraerlo.

Observe que en la siguiente expresión se ha extraído el factor común pero se ha cometido un error ¿Cuál es?

$$\frac{3}{4} x + 5x - x = x \cdot \left(\frac{3}{4} + 5 \right)$$

En la expresión algebraica inicial hay tres términos y en el paréntesis que aparece al sacar el factor común aparecen sólo dos términos. ¿Es correcto esto?

Si observa el tercer término verá que coincide con el factor común a extraer. Entonces, ¿qué se coloca al sacar el factor común?

Por ello la expresión correcta que quedaría al sacar factor común x sería:

$$x \cdot \left(\frac{3}{4} + 5 - 1 \right)$$

Situación 2

El factor común es la parte numérica o coeficientes.

¿Cuál es el factor numérico que se repite en todos los términos? (para visualizar el factor común es conveniente que factoricen cada uno de los números o coeficientes de cada uno de los términos)

.....

Seguramente al factorizar encontraron que el número 3 es el factor común. Extraigan dicho factor, dividiendo cada término por el factor común 3, y escriban en el cuadro la expresión final que obtienen:

b) $10x + 5y =$

¿Cuál es el factor común en esta expresión algebraica?

Para extraer el factor común, en este caso el número 5, hay que dividir ($10:5 = 2$) y en el segundo término ($5:5 = 1$). Luego la expresión final queda:

.....

Noten que el segundo término queda **1y** o simplemente **y**. Esto ocurre cuando el factor común coincide con el coeficiente del término.

c) $12x + 6y - 18a =$

d) $10x + 6m - 8y =$

Verifiquen que los resultados que obtuvieron coincidan con los que aparecen en la siguiente tabla:

a) $15x - 6y + 9a =$	$3 \cdot (5x - 2y + 3a)$ (observe que $15:3 = 5$; $6:3 = 2$ y $9:3 = 3$)
b) $10x + 5y =$	$5 \cdot (2x + 1y) = 5 \cdot (2x + y)$ (observe que $10:5 = 2$; $5:5 = 1$ y recuerde que $1y = y$)
c) $12x + 6y - 18a =$	$6 \cdot (2x + y - 3a)$ (observe que $12:6 = 2$; $6:6 = 1$ y $18:6 = 3$)
d) $10x + 6m - 8y =$	$2 \cdot (5x + 3m - 4y)$ (observe que $10:2 = 5$; $6:2 = 3$ y $8:2 = 4$)

Situación 3

El factor común tiene una parte numérica y una parte literal

NOTAS

<p>La expresión inicial es:</p>	$8x^2 + 4x - 12xy$
<p>El factor que se repite en todos los términos de la expresión es x, la "letra x". Pero en la parte de los coeficientes no es visible por lo que si factoriza notará cuál es el factor que se repite en todos los términos de la expresión. ¿Cuál es el factor común?</p>	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot xy$
<p>Como el factor común de la parte numérica o coeficientes es $2 \cdot 2 = 4$ y en la parte literal es x, entonces, se debe extraer el factor común: $4x$. Complete el cuadro de la derecha:</p>	$4x \cdot (\dots + 1 - \dots \cdot y)$ note que cuando todo el término coincide con el factor común se coloca 1.
<p>Se puede escribir la expresión inicial y la expresión anterior como una identidad que queda así:</p>	$8x^2 + 4x - 12xy = 4x \cdot (2x+1-3y)$
<p>Realice la verificación correspondiente, aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición o sustracción. Aplique la propiedad y verifique si llega a la expresión inicial</p>	$4x \cdot (2x+1-3y) = \dots\dots\dots$

Ahora le proponemos extraer el factor común de cada una de las siguientes expresiones:

a) $4xy + 6x - 8xy =$

¿Cuál es el factor común de la parte literal?

¿Cuál es el factor común de los coeficientes o números? (recuerde que puede factorizar los números).
.....

Luego, hay que extraer el factor común, que en este caso consta de un número y una letra: $2x$

$4xy + 6x - 8xy = 2x \cdot (\dots\dots\dots + \dots\dots\dots - \dots\dots\dots)$

b) $6xy - 6x =$

NOTAS

¿Cuál es el factor común en este caso?.....

Seguramente que al extraer dicho factor notará que coincide con el segundo término de la expresión inicial, por lo que deberá colocar 1 en el término del paréntesis correspondiente. Complete:

$$6xy - 6x = 6x \cdot (\dots\dots\dots - 1)$$

c) $8xy + 6x - 4xy =$

¿Cuál es el factor común numérico?

¿Cuál es el factor común de la parte literal?

Entonces el factor común a extraer es

Extraiga dicho factor y escriba la expresión que obtiene:

d) $15xy - 5ax + 10x =$

Determine cuál es el factor común, realice la extracción correspondiente y escriba la expresión que obtiene:

Verifique que los resultados que obtuvo coinciden con los que aparecen en la siguiente tabla:

a) $4xy + 6x - 8xy =$	$2x \cdot (2y + 3 - 4y)$
b) $6xy - 6x =$	$6x \cdot (y - 1)$ (observe que el segundo término coincide con el factor común, entonces en el paréntesis aparece el número 1)
c) $8xy + 6x - 4xy =$	$2x \cdot (4y + 3 - 2y)$
d) $15xy - 5ax + 10x =$	$5x \cdot (3y - a + 2)$



ACTIVIDADES

1. Extraiga factor común en cada caso:

a) $3x - 15 =$

b) $12x + 6y - 12z =$

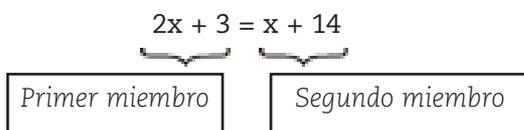
NOTAS

¿Cómo se resuelve una ecuación?

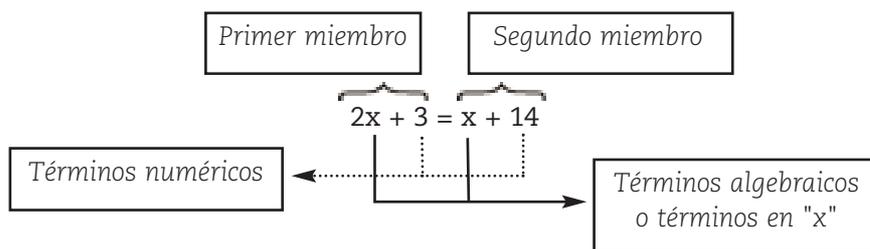
Para explicar cómo se resuelve una ecuación primero es necesario considerar tres puntos básicos: las partes de una ecuación, las propiedades de la suma y la multiplicación en el conjunto de los números racionales y algunas operaciones sencillas con expresiones algebraicas.

LAS PARTES QUE TIENE UNA ECUACIÓN

Como toda ecuación es una igualdad, siempre existen dos partes básicas de la misma: el primer miembro que es la parte de la ecuación que se encuentra a la izquierda del signo igual y el segundo miembro que es la parte de la ecuación que se encuentra a la derecha del signo igual. Observe los miembros señalados en la siguiente ecuación:



A su vez en cada miembro pueden haber términos numéricos y/o términos algebraicos.



LAS PROPIEDADES DE LA ADICIÓN Y DE LA MULTIPLICACIÓN EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES (Q)

Debe recordar las propiedades, tanto de la suma como de la multiplicación, porque serán empleadas para resolver las ecuaciones. A continuación se nombran y enuncian, pero si necesita volver a leer el tema, hágalo.

Para la adición, las propiedades que usted tiene que recordar son:

Elemento neutro

Existe el cero de \mathbb{Q} , tal que para todo número racional "a" se verifica: $0 + a = a + 0 = a$.

NOTAS

Elemento opuesto o inverso aditivo

Para todo número racional "a", distinto de cero, existe el racional "-a", tal que: $a + (-a) = -a + a = 0$.

Uniforme

Para todos los números racionales a, b, c; si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

Cancelativa

Para todos los números racionales a, b, c, si $a + c = b + c$, entonces $a = b$.

Para la multiplicación, las propiedades que usted debería recordar son:

Elemento neutro

Existe el uno de \mathbb{Q} , tal que para todo número racional "a" se verifica: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

Elemento inverso multiplicativo

Todo número racional "a", distinto de cero, tiene su inverso: " $\frac{1}{a}$ " tal que: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

Uniforme

Para todos los números racionales a, b, c; si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$

Cancelativa

Para todos los números racionales a, b, c, siendo c distinto de cero, si $a \cdot c = b \cdot c$, entonces $a = b$

Distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y a la resta

Para todos los números racionales a, b, c se cumple que $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Y para algunas operaciones sencillas con expresiones algebraicas:

Recordar simplemente que para operar con expresiones como: $2x + 3x - 1x$, y como todos los términos son semejantes (tienen la misma parte literal - letras), se suman o restan los coeficientes, es decir los números que están a la izquierda de cada x en cada término; en este caso $(2 + 3 - 1)$ y la expresión anterior puede escribirse como $4x$. Es decir:

Nota: son expresiones equivalentes:

$$x = 1x$$

$$4 \cdot x = 4x$$

$$2x + 3x - 1x = \dots\dots\dots$$

Luego de esta revisión, abordaremos la resolución de ecuaciones.

NOTAS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Para abordar este tema lo invitamos a resolver situaciones que, por ser las primeras, lo haremos juntos.

Situación 1

Lea con atención el enunciado y marque, de alguna manera, los datos que considere importantes para resolver la situación.

Luis piensa un número que aumentado en 15 da como resultado 5. ¿Cuál es el número que pensó?

Esta situación se puede resolver de varias maneras. La que le presentamos a continuación es sólo una de ellas. Una alternativa para resolver este problema es pensar en una ecuación, por lo que es necesario primero definir cuál es la incógnita a descubrir. ¿Qué pide el problema?

Como el problema pide encontrar el número que pensó Luis, es que llamaremos x a ese valor que por el momento se desconoce pero que es objeto de nuestro trabajo.

Otro dato que debió señalar es que ese número está "aumentado en 15", lo que simbólicamente se puede expresar como "más 15". Otro dato que da la situación es que "da como resultado 5" lo que se puede interpretar como: "igual a 5". Con esta información es posible expresar en lenguaje algebraico la situación. Hágalo:

$$\dots\dots\dots + \dots\dots\dots = 5$$

Para resolver la ecuación, es decir para encontrar el valor de x que satisface la igualdad anterior, se aplican propiedades, como se muestra a continuación:

$$x + 15 = 5$$

Para calcular el valor de "x", debemos "sacar" el término 15. Para ello sumamos a ambos miembros el opuesto de 15, por propiedad uniforme.

$$x + 15 + (-15) = 5 + (-15)$$

En el primer miembro aplicamos la propiedad del elemento opuesto.

$$x + 0 = -10$$

En el primer miembro aplicamos la propiedad del elemento neutro y sumamos los términos numéricos.

$$x = -10$$

Para verificar si el valor encontrado es el correcto, se reemplaza el valor de "x" (-10) en la ecuación inicial y, resolviendo los cálculos numéricos, se analiza si verifica o no la igualdad. Así se tiene:

$$x + 15 = 5$$

$x = -10$, sustituya a x por -10 en la ecuación y resuelva:

$$\dots\dots + \dots\dots = 5$$

$$\dots\dots\dots = 5$$

¿Se ha verificado la igualdad?

En el caso de no verificarse la igualdad se debe rehacer la ecuación, porque esto indica que el valor de x encontrado no es el correcto.

Finalmente, podemos decir que el número que pensó Luis es -10 , que es la respuesta a la situación planteada.

Situación 2

Lea con atención el enunciado y marque, de alguna manera, los datos que considere importantes para resolver la situación.

Si al triple de un número se le resta su doble y se aumenta en 5, se obtiene 4. ¿De qué número se trata?

Esta situación se puede resolver de varias maneras. La que le presentamos a continuación es sólo una de ellas y es a través de una ecuación.

Si indicamos con la letra x el número que hay que encontrar y si señaló los datos del problema, podrá expresar en lenguaje algebraico el enunciado anterior. Recuerde que la expresión "triple de un número" la puede pensar como tres veces ese número, lo que es equivalente a $3 \cdot x$. ¿Cómo expresaría "el doble de un número" en lenguaje algebraico?

Le proponemos escribir la ecuación correspondiente al enunciado:

.....

Resuelva la ecuación planteada explicando cada paso aplicado.

¿Qué valor de x obtuvo?

Ahora, le proponemos que lea con atención cada paso seguido hasta llegar al valor de la incógnita, como se muestra a

NOTAS

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Nota

Recuerde que la expresión algebraica del enunciado debe comunicar la misma idea que la situación expresada en lenguaje coloquial.

NOTAS

continuación. Suponemos que la ecuación que planteó es la siguiente u otra equivalente:

$$3x - 2x + 5 = 4$$

En esta ecuación se presentan dos términos algebraicos semejantes, por lo que se puede obtener una expresión más simple con un solo término en x.

$$3x - 2x + 5 = 4$$

$$1x + 5 = 4$$

Al quedar un único término en "x", se comienza a "sacar" el término 5, para lo que sumamos a ambos miembros el opuesto de 5. ¿Cuál es el opuesto de 5?

$$1x + 5 + (-5) = 4 + (-5)$$

En el primer miembro se aplica la propiedad del elemento opuesto y en el segundo miembro resolvemos el cálculo numérico que aparece.

$$x + 0 = -1$$

En el primer miembro aplicamos la propiedad del elemento neutro y finalmente se obtiene el valor de x, es decir la solución de la ecuación.

$$x = -1$$

Para verificar si el valor encontrado es el correcto, reemplace el valor de "x" (-1) en la ecuación inicial, resuelva los cálculos numéricos y analice si verifica o no la igualdad.

$$3x - 2x + 5 = 4$$

Sustituya la x en la ecuación por -1, se tiene:

$$3 \cdot \dots - 2 \cdot \dots + 5 = 4$$

$$\dots = 4$$

$$\dots = 4$$

¿Se verifica la igualdad?

Entonces podemos dar la respuesta a la situación diciendo que se trata del número -1.

Situación 3

Lea con atención el enunciado y marque, de alguna manera, los datos que considere importantes para resolver la situación.

"Luis cobra su sueldo y tiene ya organizado la distribución del dinero: la mitad lo gasta en alimentos (gastos de carnicería, en supermercados, verdulería, panadería), la cuarta parte del sueldo está destinada a pagar impuestos y la quinta parte la deja para gastos libres, que los destina a diversión y ropa. Si puede ahorrar \$ 50, ¿cuál es el monto total del sueldo?"

NOTAS

Esta situación se puede resolver de varias maneras; una de las alternativas es a través de una ecuación.

Para escribir la ecuación que permite resolver el problema es necesario, primero, definir cuál es la incógnita a encontrar.

¿Qué pide el problema?

.....

¿Cuál será, entonces la incógnita a buscar?

.....

Como el problema pide encontrar el monto total del sueldo es que llamaremos x a la medida del monto (al número que indica cuántos pesos es el total del sueldo). Ese número que por el momento se desconoce es la incógnita cuyo valor hay que encontrar.

Un dato que debe haber señalado es la parte del sueldo que gasta en cada categoría: alimentos, ropa, impuestos. Para organizar la información, complete la siguiente tabla con los datos correspondientes:

<i>Categoría</i>	<i>Parte del sueldo</i>
<i>Alimentos</i>	$\frac{1}{2}$
<i>Pago de impuestos</i>	
<i>Diversión y ropa</i>	

Otro dato que seguramente señaló es el dinero que ahorró: \$50.

Ahora hay que traducir el problema a un lenguaje algebraico, expresando con x el total del sueldo. Recuerde que "la mitad del sueldo lo destina a alimentos" se puede expresar algebraicamente así: $\frac{1}{2} x$.

De manera similar podría pensarse que la siguiente ecuación es una forma de expresar y un camino para resolver el problema:

$$x - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} x - \frac{1}{5} x = 50$$

NOTAS

Observe el significado de cada término de la ecuación que se indica en el siguiente cuadro:

x	→	Sueldo
$\frac{1}{2} x$	→	Alimentos
$\frac{1}{4} x$	→	Pago de impuestos
$\frac{1}{5} x$	→	Diversión y ropa
50	→	Ahorro

La ecuación anterior no es la única ecuación posible hay otras ecuaciones que pueden pensarse que también resuelven la situación planteada, por ejemplo, las siguientes:

$$\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} x + \frac{1}{5} x + 50 = x \quad \text{ó} \quad x - \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} x + \frac{1}{5} x \right) = 50$$

Para resolver la ecuación se aplican propiedades convenientemente:

$$x - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} x - \frac{1}{5} x = 50$$

Se debe resolver:

$$1x - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} x - \frac{1}{5} x =$$

para lo cual, como todos los términos son semejantes (tienen la misma parte literal), se suman los coeficientes, es decir los números que están a la izquierda de cada x en cada término:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{\dots}{\dots} - \frac{\dots}{\dots} - \frac{\dots}{\dots} - \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

Se suman los términos semejantes y se obtiene:

$$\dots \cdot x = 50$$

Luego se multiplica en ambos miembros o a ambos lados de la igualdad (propiedad uniforme) por el inverso multiplicativo de $\frac{1}{20}$.

¿Cuál es el inverso multiplicativo de $\frac{1}{20}$?..... Multiplique por dicho número a ambos miembros:

NOTAS

$$\frac{1}{20} \cdot x \cdot \dots\dots\dots = 50 \cdot \dots\dots\dots$$

Luego, si se aplica la propiedad del inverso multiplicativo en el primer miembro y se resuelve el segundo miembro, se tiene:

$\dots\dots\dots \cdot x = \dots\dots\dots$, que si consideramos que el uno es elemento neutro en la multiplicación en \mathbb{Q} queda:

$$x = 1000$$

Le proponemos que haga usted la verificación de la ecuación:

Finalmente, puede expresarse que \$1.000 es el monto total del sueldo de Luis.

Situación 4

Ahora le proponemos la siguiente situación:

En esta situación le proponemos resolver una ecuación ya planteada, sin partir de una situación en lenguaje coloquial, con el propósito de trabajar los pasos algebraicos para resolverla.

"Resolver la ecuación: $3x + 4x + 5 = 6x - 1$ "

Intente resolverla por sus propios medios y luego revise lo realizado con el siguiente desarrollo:

$$3x + 4x + 5 = 6x - 1$$

En esta ecuación se presentan dos términos algebraicos semejantes, en el primer miembro uno y otro en el segundo miembro.

$$7x + 5 = 6x - 1$$

Se suma a ambos miembros el término opuesto a $6x$, para agrupar los términos en " x " en un miembro, en este caso el primero. El término opuesto es $-6x$.

$$7x + (-6x) + 5 = 6x + (-6x) - 1$$

Se asocian los términos en " x " del primer miembro y se aplica la propiedad del opuesto en el segundo.

$$1x + 5 = 0 - 1$$

Sumamos a ambos miembros el opuesto de 5 y resolvemos el cálculo del segundo miembro.

$$1x + 5 + (-5) = -1 + (-5)$$

$$x = -6$$

En el primer miembro aplicamos la propiedad del elemento neutro y se obtiene la expresión final.

Le proponemos realizar la verificación correspondiente:

NOTAS

Luego, la solución de la ecuación es $x = -6$

Situación 5

Lea la siguiente situación y plantee una ecuación que traduzca simbólicamente lo expresado en el enunciado:

"En una construcción se utilizaron:

$\frac{1}{4}$ de las cerámicas para el lavadero,

$\frac{1}{8}$ de las cerámicas para la cocina y hay todavía 15 m².

¿Cuántos metros cuadrados de cerámica habían inicialmente?"

Si le llama x al número de metros cuadrados que había inicialmente, exprese en lenguaje algebraico la parte utilizada para el lavadero: y la parte utilizada en la cocina:

Luego, escriba la ecuación que responde a la situación.

Es posible que haya pensado en la siguiente ecuación u otra equivalente:

$$\frac{1}{4} \cdot x + \frac{1}{8} \cdot x + 15 = x$$

Sumando los coeficientes de los términos semejantes $\frac{1}{4} \cdot x$ y $\frac{1}{8} \cdot x$, es decir:

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right)$$

Se tiene un expresión equivalente a la ecuación inicial que es:

$$\dots \cdot x + 15 = x$$

Se agrupan los términos semejantes, términos con x, en un mismo miembro aplicando propiedades convenientemente (elemento opuesto, uniforme). Observe cómo son aplicadas las mismas:

$$\frac{3}{8} \cdot x + \frac{3}{8} \cdot x + 15 = x - \frac{3}{8} \cdot x$$

Sume los términos semejantes del segundo miembro y aplique propiedad del elemento opuesto y neutro en el primer miembro:

$$0 + 15 = \frac{5}{8} \cdot x$$

Aplique propiedad del opuesto y la uniforme con el inverso multiplicativo de $\frac{5}{8}$:

NOTAS

$$15 \cdot \dots\dots\dots = \frac{5}{8} \cdot x \cdot \dots\dots\dots$$

Aplicando la propiedad del elemento neutro en el segundo miembro y resolviendo el primero obtendrá el valor de la incógnita x.

.....

Verifique si el valor encontrado de x es el correcto, reemplazando el valor de x en la expresión inicial de la ecuación.

Luego, se puede responder que: **inicialmente habían 24 metros cuadrados de cerámica.**

Situación 6

En esta situación le proponemos resolver una ecuación ya planteada sin partir de una situación en lenguaje coloquial, con el propósito de trabajar los pasos algebraicos para resolverla

"Resolver la ecuación: $3(x+4) = 2x-1$ "

Intente resolverla por sus propios medios y luego revise lo realizado con el siguiente desarrollo:

$$3(x+4) = 2x-1$$

En esta ecuación se presenta un único término en el primer miembro y dos en el segundo, uno de ellos en "x". En el primer miembro se puede aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y se obtiene la expresión siguiente:

$$3x + 3 \cdot 4 = 2x-1$$

$$3x + 12 = 2x-1$$

Se suma a ambos miembros el opuesto a 2x, para agrupar los términos en "x" en un miembro, en este caso el primero.

$$3x + (-2x) + 12 = 2x + (-2x) -1$$

Se suman los términos en "x" del primer miembro y se aplica la propiedad del opuesto en el segundo.

$$1x + 12 = 1$$

Sumamos a ambos miembros el opuesto de 12 y resolvemos el cálculo que aparece en el segundo miembro.

$$1x + 12 + (-12) = 1 + (-12)$$

En el primer miembro aplicamos la propiedad del elemento neutro y se obtiene la expresión final: el valor de x que satisface la ecuación.

$$x = -13$$

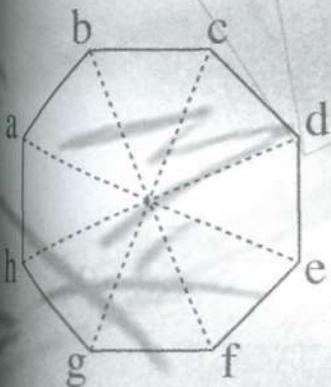
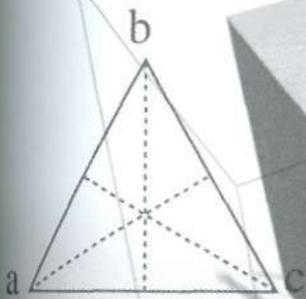
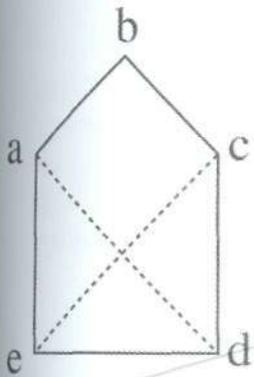
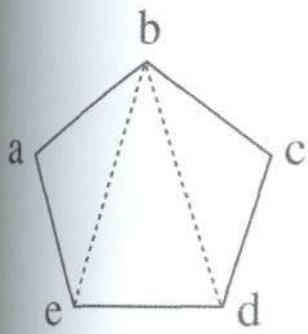
Realice la verificación de la ecuación:

Luego, la solución a la ecuación es **x = -13.**

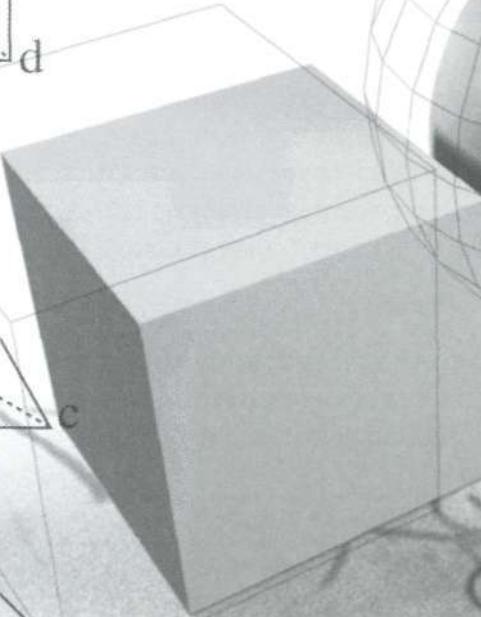


1. Resuelvan las siguientes situaciones planteando y resolviendo una ecuación.

- a) El triple del dinero destinado a la compra de una batería para auto es equivalente al dinero que se necesita para comprar dos cubiertas para el mismo. Si el costo de cada cubierta es de \$120. ¿cuál es el precio de la batería?
- b) Una empresa constructora se compromete a terminar la reparación de una ruta en tres etapas. En la primer etapa repara una cuarta parte de la ruta, en la segunda etapa las dos quintas partes de la misma y en la tercer etapa repara los últimos 1.400 metros de la ruta. ¿Cuántos metros tiene la ruta que se reparó?
- c) En un operativo, la cuarta parte del personal afectado se destina a requisita vehicular, la tercera parte del personal se lo destina a identificación y los oficiales restantes, que son 60, para apoyo y seguridad. ¿Cuántos efectivos fueron los afectados al operativo?
- d) Si el largo de un terreno de forma rectangular es igual al triple de su ancho y si se sabe que la cantidad de longitud del contorno del terreno es de 160 metros. ¿Cuál es la medida del largo y del ancho del terreno?
- e) En un negocio, al realizar una compra de un producto artesanal, le cobran \$5 por gastos de envío, independientemente del número de productos comprados. Si se sabe que el triple de lo abonado por una compra realizada de productos artesanales es de \$ 390. ¿Cuál es el precio del producto artesanal comprado?



$$(x^2 + 1) dx =$$



Eje 2: Relaciones y funciones. Nociones de probabilidad y estadística

¿Qué esperamos que usted logre cuando termine este eje?

NOTAS

Al final de este eje esperamos que usted pueda:

- Comprender y saber resolver problemas, seleccionando el tipo de razonamiento, interpretando los resultados y justificando los procedimientos empleados.
- Describir, comunicar e interpretar información matemática brindada en forma algebraica, simbólica y gráfica, de relaciones y funciones numéricas, utilizando distintos lenguajes.

¿Qué vamos a estudiar?

Algunos de los contenidos más importantes que vamos a estudiar son: relaciones y funciones numéricas: intervalos de positividad y negatividad. Comportamiento de las mismas: ceros, continuidad, crecimiento y decrecimiento. Estadística: frecuencia relativa, porcentual y medidas de tendencia central. Gráficos. Probabilidad: clásica y frecuencial.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

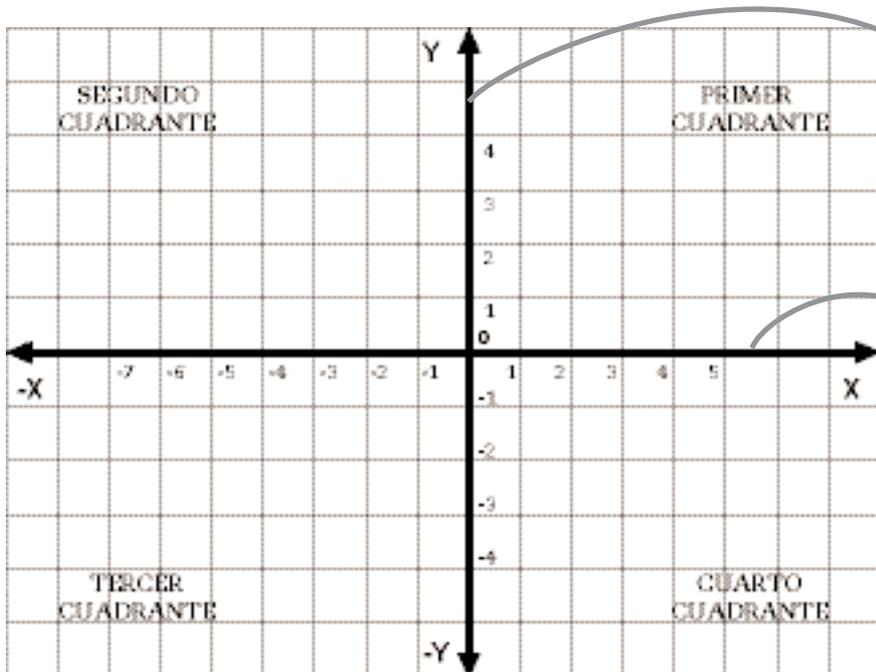
SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

En matemática, para ubicar puntos en un plano se emplean dos ejes perpendiculares (**rectas perpendiculares**) que determinan cuatro cuadrantes. A este conjunto formado por los dos ejes los cuatro cuadrantes se lo denomina sistema de coordenadas cartesianas.

Una representación del mismo se muestra a continuación. Observe que la recta o eje horizontal recibe el nombre de eje de abscisas o de "las x" y el eje vertical recibe el nombre de eje de ordenadas o de "las y".

?
rectas perpendiculares

Dos rectas secantes que separan al plano en cuatro ángulos o partes congruentes (si se superponen coinciden exactamente) se llaman perpendiculares.



• Eje de ordenadas o eje de las y. Se simboliza con la letra Y.

• Eje de abscisas o eje de las x. Se simboliza con la letra X.

NOTAS

.....

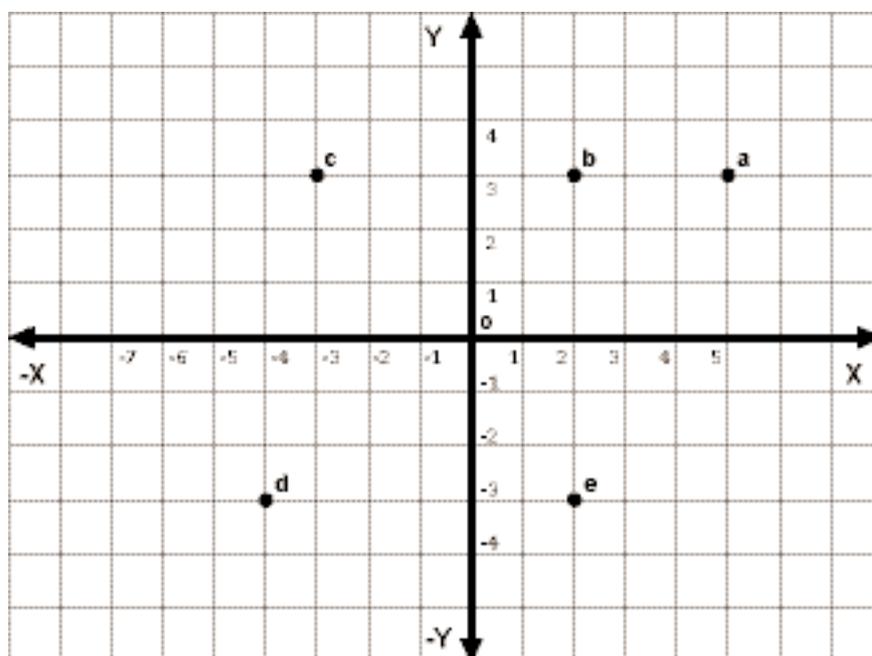
Señale con color, en el sistema de coordenadas, el punto de intersección del eje horizontal y el vertical, punto en el cual "se cortan" los ejes y que pertenece a ambos. A dicho punto se lo llama punto origen de coordenadas.

Para ubicar un punto en el plano que determinan los dos ejes de coordenadas (en cualquiera de los cuatro cuadrantes), usted necesita ubicar dos números que siempre se dan en un determinado orden. Es decir, que un punto queda perfectamente ubicado con un par ordenado de números, tal que el primer número representa la abscisa y el segundo número representa la ordenada.

Por ejemplo: en el plano siguiente se han representado los puntos a (5, 3); b (2, 3); c (-3, 3); d (-4, -3) y e (2, -3). Los pares de números ordenados que aparecen entre paréntesis son las coordenadas de los puntos y son los valores que permiten ubicar a cada uno.

• Al punto de intersección del eje horizontal y el vertical le corresponde el par (0, 0). Se llama punto origen del sistema de coordenadas.

• Cada eje tiene que estar graduado de manera que entre dos puntos de los ejes que representan enteros consecutivos haya siempre la misma distancia.



PENSAR

Si analiza las coordenadas del punto a (5, 3) y su ubicación en el plano, notará que hay un criterio de ordenación. La primer coordenada es cinco y la segunda tres, esto significa que:

- primero se nombra "5" indicando cinco lugares en la recta numérica horizontal hacia la derecha (por ser un entero positivo) desde el punto (0,0),
- y luego "3" indicando tres lugares en dirección vertical hacia arriba (por ser un entero positivo) desde el punto (5, 0).

En forma similar las coordenadas del punto e $(2, -3)$ indican:

NOTAS

- la coordenada "2" indica dos lugares en la recta numérica horizontal hacia la derecha (por ser un entero positivo) desde el punto $(0, 0)$,
- y luego, la segunda coordenada, "-3", indica tres lugares en dirección vertical hacia abajo (por ser un entero negativo) desde el punto $(2,0)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

RECORDAR



Abscisa del punto e
(Se coloca en primer lugar)

Coordenadas de e $(2, -3)$

Ordenada del punto e
(Se coloca en segundo lugar)

El primer número indica la posición de la dirección horizontal y el segundo la posición de la dirección vertical.

ACTIVIDADES



- 1) Realicen este análisis con los puntos b , c y d antes representados en el sistema de coordenadas. Indiquen en cada caso el significado de cada una de las coordenadas correspondientes a dichos puntos, mostrando lo que cada coordenada indica.
- 2) Ubiquen los siguientes puntos en el sistema de coordenadas: f $(2, -4)$, g $(-2, -4)$ y h $(-6, 4)$.
- 3) Completen el siguiente cuadro con los puntos a , b , c , d , e , f , g y h y sus coordenadas, según al cuadrante al que pertenecen:

Primer cuadrante	Segundo cuadrante	Tercer cuadrante	Cuarto cuadrante
a $(5, 3)$			

4. Si observan la tabla anterior podrán responder:

- a) En los puntos que pertenecen al primer cuadrante: ¿qué signo tiene la abscisa?,
¿y la ordenada?
- b) En los puntos que pertenecen al segundo cuadrante: ¿qué signo tiene la abscisa?,
¿y la ordenada?
- c) En los puntos que pertenecen al tercer cuadrante: ¿qué signo tiene la abscisa?,
¿y la ordenada?
- d) En los puntos que pertenecen al cuarto cuadrante: ¿qué signo tiene la abscisa?,
¿y la ordenada?

NOTAS

Si usted analiza sus respuestas comprenderá por qué se puede afirmar que:

- en el **primer cuadrante** los puntos tienen **abscisa y ordenada positivas**;
- en el **segundo cuadrante** los puntos tienen **abscisa negativa y ordenada positiva**;
- en el **tercer cuadrante** los puntos tienen **abscisa y ordenada negativas**;
- en el **cuarto cuadrante** los puntos tienen **abscisa positiva y ordenada negativa**.

¿Qué pasa cuando una de las coordenadas de un punto es igual a cero? Por ejemplo, analice qué ocurre si:

- La abscisa es igual a cero

En el siguiente sistema de coordenadas cartesianas ubique los puntos: a (0, 3); b (0, -2); c (0, 2)

NOTAS

¿Dónde quedan ubicados dichos puntos?

Es decir que todos los puntos cuyas coordenadas sean $x = a$ e $y = 0$, siendo a cualquier número real, pertenecen al eje horizontal o eje de abscisas. Por lo tanto su ubicación está en el eje de abscisas o eje de las x (eje horizontal).

Así, por ejemplo, el punto $f(-2, 0)$ queda ubicado en el eje horizontal como se muestra en el sistema de referencia:



PENSAR

• Cada punto del plano está determinado por un par ordenado de números que son sus coordenadas, que simbolizamos (x, y) .

• La primer componente se refiere a las unidades "o lugares" en el eje de las "x" y recibe el nombre de abscisa o coordenada x ; y la segunda componente a las unidades "o lugares" en dirección vertical o del eje de las "y" y recibe el nombre de ordenada o coordenada y .

• Si el valor de la abscisa de un punto es igual a cero el punto se ubica en el eje de las y o eje de ordenadas.

• Si el valor de la ordenada de un punto es igual a cero, el punto se ubica en el eje de las x o eje de abscisas.

LA RECTA EN EL PLANO

Analice las siguientes situaciones:

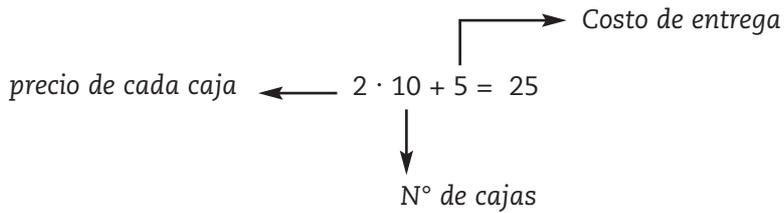
Situación 1

Una empresa compra cajas para embalar a \$2 cada una. Para que el proveedor entregue en el domicilio de la empresa las cajas, debe abonar \$5 más, importe fijo que no depende de la cantidad de cajas que se compren. ¿Cuánto habrá que pagar si se compran 10 cajas y la entrega se hace en el domicilio de la empresa? ¿Qué cálculo haría para resolver la situación?

Resuelva la situación:

NOTAS

Para resolver la situación planteada se puede pensar en resolver un cálculo como el siguiente, que se muestra con el resultado correspondiente:



- Si se quieren comprar, bajo las mismas condiciones, 5 cajas. ¿Cuál será el monto a pagar? ¿Qué cálculo (similar al propuesto antes) resuelve esta nueva situación?

.....

Así el cálculo para esta nueva compra es: $2 \cdot 5 + 5 = 15$

- Si se quieren comprar, bajo las mismas condiciones, 6 cajas. ¿Cuál será el monto a pagar? ¿Qué cálculo (similar al propuesto antes) resuelve esta nueva situación? Escriba y resuelva dicho cálculo:

.....

- Si se quieren comprar, bajo las mismas condiciones, 8 cajas. ¿Cuál será el monto a pagar? ¿Qué cálculo (similar al propuesto antes) resuelve esta nueva situación? Escriba y resuelva dicho cálculo.

.....

Esta situación puede ser expresada mediante una expresión algebraica que vincule el número de cajas con el número de pesos que hay que pagar en cada compra.

Para seguir avanzando en su estudio, le solicitamos que recuerde lo que estudió cuando trabajó con ecuaciones.

Allí seguramente comprendió qué es una ecuación, para qué se emplean las ecuaciones.

Recuerde que allí dijimos que cuando se plantea una ecuación es muy importante traducir o codificar correctamente

NOTAS

del lenguaje coloquial al algebraico y que, además, una ecuación puede tener una o más variables.

Ahora le proponemos que simbolice con "y" el número de pesos a pagar por la compra y con "x" el número de cajas que se compran, ¿Qué expresión obtiene?

Esta expresión permitiría calcular cuántos pesos hay que pagar según el número de cajas compradas, siempre que la entrega se haga en el domicilio de la empresa como se indica en el enunciado inicial de la situación.

Esta relación que existe entre el número de pesos a pagar por la compra y el número de cajas que se compran es una **función**. Para cada número de cajas existe uno y sólo un número correspondiente que indica cuántos pesos hay que pagar por la compra.

Esta característica que a cada valor de la variable independiente (x) le hace corresponder uno y sólo un valor de la variable dependiente (y) es la que permite decir que dicha relación es una **función** (este concepto será retomado y profundizado más adelante).

Para la representación de la función que relaciona las variables antes indicadas que intervienen en este problema se sugiere completar la siguiente tabla y luego ubicar dichos puntos en un sistema de coordenadas.

Por ello se le pide que:

a) Complete la siguiente tabla de valores:

x (número de cajas)	y (número de pesos a pagar por la compra)
5	
6	
10	
12	

b) Represente gráficamente, en el sistema de coordenadas que se encuentra a continuación, los valores de la tabla. Recuerde que a cada valor de x y su correspondiente valor de y le corresponde un punto del plano de coordenadas (x, y).

NOTAS

Observe la gráfica obtenida: son puntos alineados, puntos que pertenecen a una misma recta. Ahora responda:

• La recta a la cual pertenecen los puntos representados, ¿pasa por el punto (0, 0), punto origen del sistema de coordenadas? ¿Por qué?

• ¿El punto de coordenadas (0, 5) pertenece a la recta representada?..... ¿Por qué?

Situación 2

Juan contrató un servicio telefónico de Internet a una empresa que cobra \$10 fijos por mes (en concepto de abono) y que además cobra \$ 1 la hora de conexión.

• ¿Cuál es el monto a pagar si al terminar el mes ocupó Internet durante 24 horas? ¿Qué cálculo haría para resolver la situación? Escriba dicho cálculo y resuelva la situación:

.....
.....

• ¿Cuál es el monto a pagar si al terminar el mes se ocupa Internet durante 20 horas? ¿Qué cálculo (similar al propuesto antes) resuelve esta nueva situación? Escriba y resuelva dicho cálculo:

.....
.....

• ¿Cuál es el monto a pagar si al terminar el mes se ocupa Internet durante 15 horas? ¿Qué cálculo (similar al propuesto antes) resuelve esta nueva situación? Escriba y resuelva dicho cálculo:

.....
.....

Esta situación puede ser expresada mediante una expresión algebraica -una fórmula- que vincule el número de horas de conexión a Internet mensual con el importe a pagar en pesos en cada mes. Así, si simbolizamos con "y" el número de pesos a pagar al terminar el mes y con "x" el número de horas de conexión correspondientes al mes, ¿qué expresión algebraica propone para representar esta situación?

.....

Posiblemente la expresión que escribió es: $y = 1 \cdot x + 10$

NOTAS

Esta relación que existe entre el número de horas de conexión a Internet y el número de pesos a pagar en el mes es una función. ¿Podría decir por qué se trata de una función?

.....

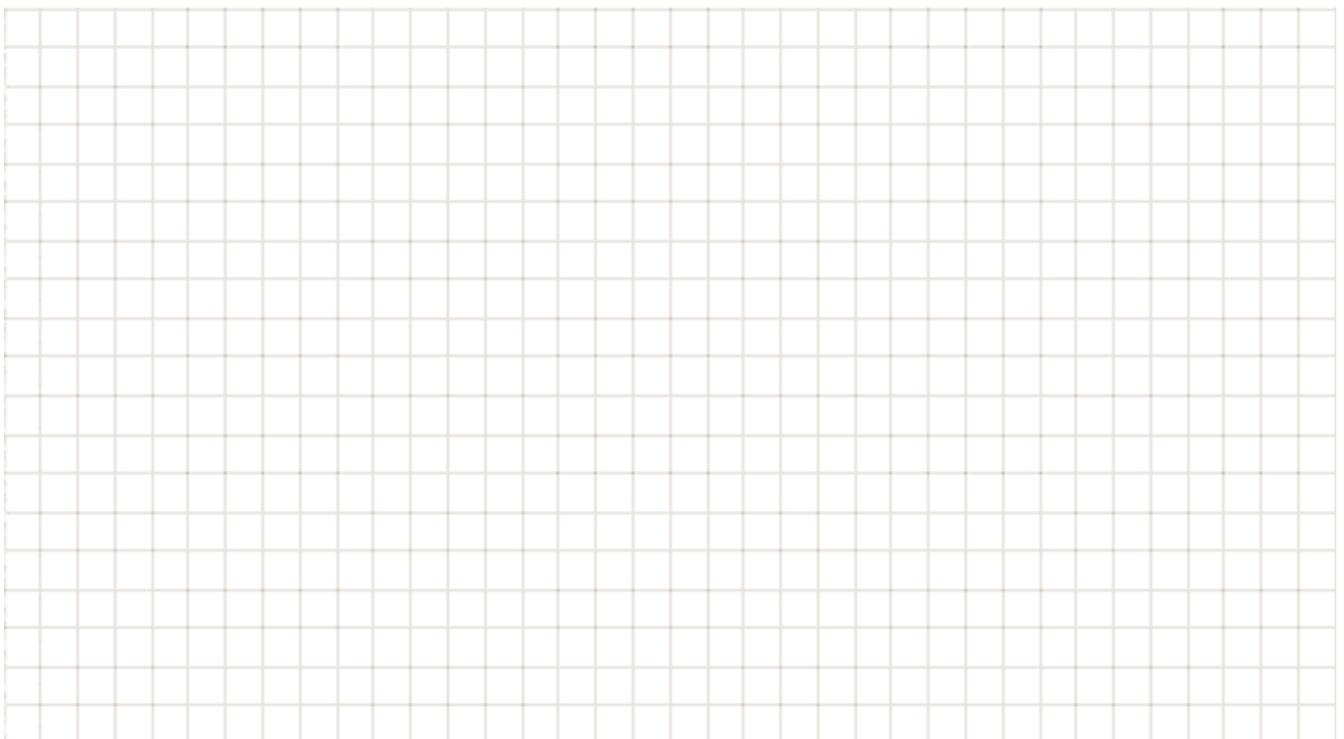
.....

Para la representación de dicha función es conveniente completar la siguiente tabla, para luego ubicar dichos puntos en un sistema de coordenadas.

a) Complete la siguiente tabla de valores:

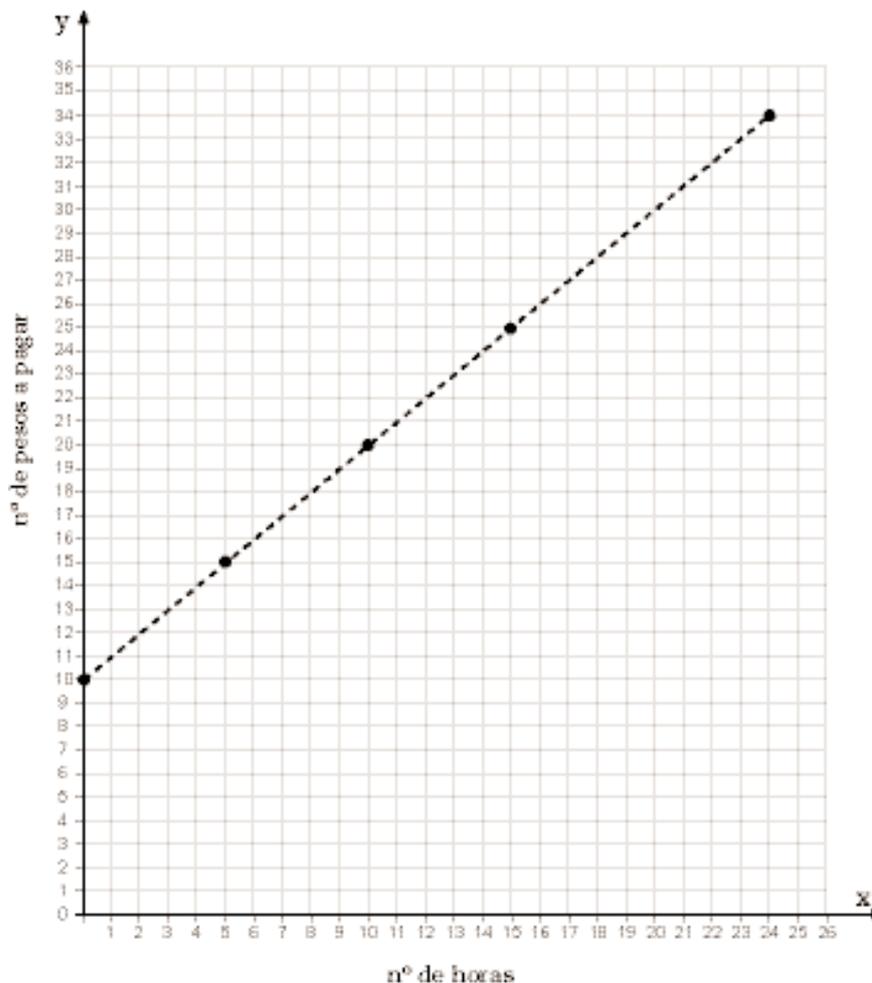
x (número de horas)	y (número de pesos a pagar en el mes)
5	
10	
15	
24	

b) Represente gráficamente, en un sistema de coordenadas, los valores de la tabla.



NOTAS

Seguramente la gráfica que obtuvo tiene las siguientes características:



Observe la gráfica y responda:

- ¿La gráfica obtenida son puntos alineados?
- ¿La recta a la cual pertenecen los puntos representados pasa por el punto (0, 0), punto origen del sistema de coordenadas?
.....
- ¿Qué coordenadas tiene el punto de intersección (punto en común) del eje de las "y" y la recta a la cual pertenecen los puntos representados?
.....

A continuación le solicitamos que analice las dos situaciones correspondientes a funciones y las compare. Observe que:

- Al representar ambas funciones resultaron puntos alineados, puntos que pertenecen a una recta. Por ello resultan ser funciones lineales.
- Sus fórmulas tienen una estructura (forma) similar:

$$y = 2 \cdot x + 5$$

$$y = 1 \cdot x + 10$$

NOTAS

Es decir que están formadas por un primer miembro que es "y" y un segundo miembro con dos términos: uno con la variable "x" llamado término dependiente y el otro sin variable que se llama término independiente.

Así, por ejemplo, se tiene:

$$y = \underbrace{2 \cdot x}_{\text{Término dependiente}} + \underbrace{5}_{\text{Término independiente}}$$

Esta expresión algebraica, que también suele llamarse fórmula, reciben el nombre de **ecuación de la recta**, porque si representamos gráficamente los infinitos puntos de coordenadas reales (pares de números reales) que satisfacen la igualdad resultan ser alineados y pertenecen a dicha recta.

Nota

Es importante que observe que no es lo mismo referirse a variables dependientes e independientes, que a términos dependientes e independientes en una expresión algebraica.

En general

La ecuación explícita de una recta es aquella que tiene la forma:

$$y = \underbrace{a \cdot x}_{\text{Término dependiente}} + \underbrace{b}_{\text{Término independiente}} \text{ siendo } a \text{ y } b \text{ números reales conocidos}$$

La fórmula de la situación 1 es $y = 2 \cdot x + 5$, donde $a = 2$ y $b = 5$.

La fórmula de la situación 2 es $y = 1 \cdot x + 10$, donde $a = 1$ y $b = 10$.

ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN EXPLÍCITA DE UNA RECTA

Si la ecuación explícita de una recta, siendo a y b números reales conocidos, es: $y = a \cdot x + b$, entonces...

¿Qué indica b?

Si observa la representación gráfica de la situación 1 verá que la recta a la que pertenecen los puntos representados corta al eje de las "y" o eje de ordenadas en un punto. ¿Qué coordenadas tiene dicho punto?

Ahora encuentre el valor que tiene y cuando $x = 0$.

NOTAS

Reemplace en la fórmula que representa la situación y resuelva:

$y = 2 \cdot x + 5$

$y = 2 \cdot \dots + 5$

$y = \dots + 5$

$y = \dots$

Observe que cuando x es igual a cero el valor de y es 5, valor que coincide con el valor de b en la fórmula de la recta asociada a la situación 1.

Observe el gráfico de la recta correspondiente a la situación que estamos analizando e indique cuáles son las coordenadas del punto donde la recta "corta" al eje y o eje de ordenadas:

.....
.....

Si considera las coordenadas de dicho punto (0, 5), ¿cuál es el valor de la ordenada?

.....
.....

Compare el valor de y obtenido cuando $x = 0$, es decir $y = 5$, con las coordenadas del punto donde se cortan la recta y el eje de ordenadas o eje de las "y". ¿Qué ocurre?

.....
.....

Se puede concluir que: el valor de b , en este caso 5, recibe el nombre de **ordenada al origen**.

Este valor siempre indica en qué punto la recta corta al eje de ordenadas. Si b es positivo el punto se ubicará desde el origen de coordenadas (0, 0) hacia arriba y si b es negativo desde el origen de coordenadas hacia abajo. O bien se puede decir que dicho punto pertenece al semieje positivo de ordenadas o al semieje negativo de ordenadas.

Las coordenadas del mismo (punto ordenada al origen) son (0, b).

Si considera lo mismo para la situación 2, la ecuación de la recta que representa dicha situación es $y = 1 \cdot x + 10$, donde $a = 1$ y $b = 10$. La ordenada al origen es 10, lo que significa que si $x = 0$, en

la ecuación se obtiene... ¿qué valor de y ?

NOTAS

Verifique que el número indicado es el correcto:

$$y = 1 \cdot x + 10$$

$$y = 1 \cdot \dots + 10$$

$$y = \dots + 10$$

$$y = \dots$$

Se puede decir que la recta pasa por el punto $(0, 10)$ y es el punto en el que la recta corta al eje y .

¿Qué indica a ?

La gráfica de la situación 1 es una recta cuya ecuación explícita es: $y = 2 \cdot x + 5$

En esta ecuación, ¿qué valor tiene a ?

Observe nuevamente el gráfico de la situación 1 y analice:

a) Si la ecuación de la recta fuera: $y = 2 \cdot x + 0$, es decir que la ordenada al origen vale cero, el punto $(0, 0)$ pertenece a la recta y si $x = 1$ el valor de y es 2, entonces el punto $(1, 2)$ también pertenece a la recta.

Observe que siempre que ocurra que la ordenada al origen es cero, cuando $x = 1$, el valor de la ordenada siempre será igual al valor de a , que en nuestro ejemplo es 2.

Represente esos dos puntos $-(0, 0)$ y $(1, 2)$ - y conéctelos mediante una recta. Observe que la recta obtenida es paralela a la correspondiente a la ecuación $y = 2 \cdot x + 5$.

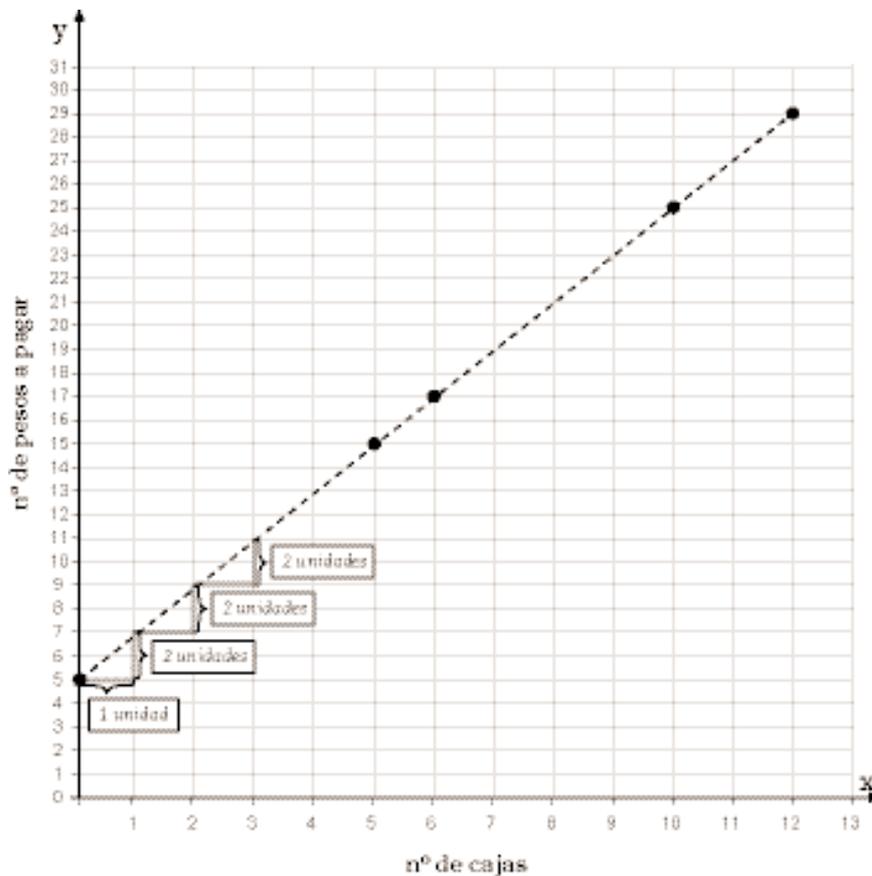
¿Qué significa esto? Que tienen la misma "inclinación" o "pendiente" respecto al eje de las " x ".

b) Ahora piense en la ecuación con la que estamos trabajando, es decir: $y = 2 \cdot x + 5$.

En ella la ordenada al origen b no vale cero sino que vale 5.

Entonces a partir de ese punto $(0, 5)$ si observa que para $x = 1$ la ordenada y valdrá $2 + 5$, es decir que $y = 7$, entonces puede comprender el significado que tiene a en la ecuación de la recta.

NOTAS



Analice los valores de "y":

Para $x = 0$ el valor de $y = 5$ (ordenada al origen)

Para $x = 1$ el valor de $y = 7$

Para $x = 2$ el valor de $y = 9$

Para $x = 3$ el valor de $y = 11$

Para $x = 4$ el valor de $y = 13$

Si observa a partir de la ordenada al origen que cada vez que el valor de "x" aumenta una unidad el valor de "y", ¿cuántas unidades aumenta?

Así es en este caso: por cada unidad que "x" aumenta, "y" aumenta dos unidades.

Ese número 2 se llama **pendiente de la recta** $y = 2 \cdot x + 5$.

Observe que lo que hemos analizado para esta situación también lo puede interpretar así: a partir de la ordenada al origen, por cada unidad que se avanza "en x", hacia la derecha en dirección horizontal, se incrementa en 2 unidades "en y", es decir en dirección vertical.

Si analizamos de manera similar la representación gráfica correspondiente a la situación 2, podrá observar que como la

ecuación es $y = 1 \cdot x + 10$.

NOTAS

¿Cuál es el número que acompaña a la x ?

Analice los valores de "y":

Para $x = 0$ el valor de $y = 10$ (ordenada al origen)

Para $x = 1$ el valor de $y = 11$

Para $x = 2$ el valor de $y = 12$

Para $x = 3$ el valor de $y = 13$

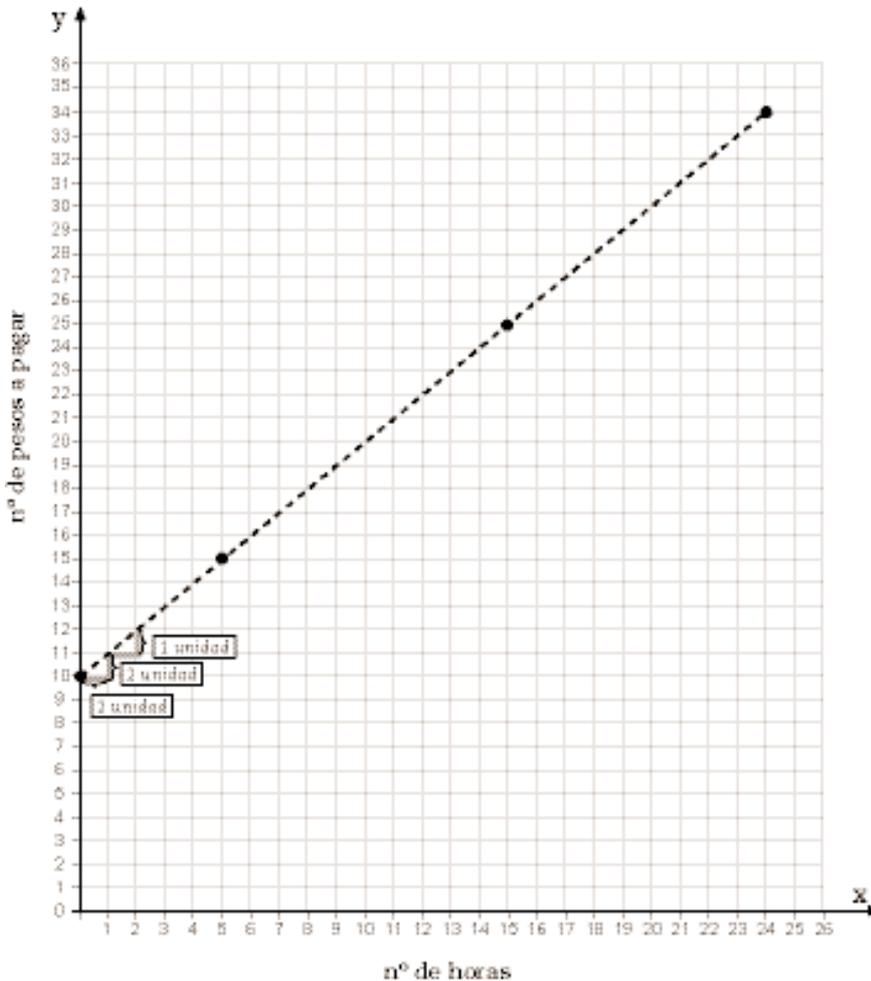
Para $x = 4$ el valor de $y = 14$

Si observa a partir de la ordenada al origen verá que cada vez que el valor de "x" aumenta una unidad el valor de "y", ¿cuántas unidades aumenta?

Ese número 1, se llama **pendiente de la recta** $y = 1 \cdot x + 10$

Observe en el gráfico que a partir de la ordenada al origen, (b = 10) por cada unidad que se avanza "en x", (es decir que pensamos lo que ocurre en y cuando $x = 1$) hacia la derecha en dirección horizontal, se incrementa en 1 unidad "en y", es decir en dirección vertical.

Observe atentamente esta característica en la representación gráfica:



NOTAS

En los casos analizados, cada vez que se avanza una unidad en "x" la variación en "y" es 2 en la situación 1, y es 1 en la situación 2. Este incremento es el que nos indica la "inclinación" de la recta y recibe el nombre de **pendiente de la recta**. Es decir que el número "que acompaña" a la x, en la ecuación explícita de una recta, es la **pendiente de la misma** e indica la inclinación de la recta con respecto al eje de las abscisas o de las x.



PENSAR

La ecuación explícita de la recta tiene la forma:

$$y = \textcircled{a} \cdot x + \textcircled{b}$$



Pendiente

Indica la inclinación que tiene la recta respecto del eje de las abscisas (de las x).

→ **Ordenada al origen**
Indica cuántas unidades por encima (si b es positivo) o por debajo (si b es negativo) del punto (0, 0) pasa la recta. Si b = 0 la recta pasa por el punto (0, 0).



ACTIVIDADES

1. Completen con el valor correspondiente a la ordenada al origen y a la pendiente en cada una de las rectas dadas a partir de su ecuación explícita.

Ecuación de la recta	Ordenada al origen	Pendiente
$y = 2 \cdot x + 5$		
$y = -3 \cdot x + 2$		
$y = -2 \cdot x - 3$		
$y = 2 \cdot x + 3$		

2. Dada la ordenada al origen y la pendiente de la recta escribir la ecuación explícita de la misma.

Ecuación de la recta	Ordenada al origen	Pendiente
$y = \dots\dots\dots$	-3	-2
$y = \dots\dots\dots$	5	2
$y = \dots\dots\dots$	3	2
$y = \dots\dots\dots$	-2	4

Para representar una función cuya gráfica es una recta o bien puntos alineados que pertenecen a una recta, se puede:

- Construir una tabla de valores y ubicar los puntos que se obtienen en la misma.

O bien...

- Utilizar el concepto de ordenada al origen y pendiente. Es decir, representar la recta en un sistema de coordenadas sólo identificando ordenada al origen y pendiente sin realizar la tabla de valores.

Analícemos ejemplos en los que se representa la recta sin elaborar la tabla de valores.

Situación 3

Representar en un sistema de coordenadas la recta correspondiente a la ecuación: $y = 3x + 2$.

Para representar dicha recta se procede primero identificando el valor de la ordenada al origen, en este caso es $b=2$, y la pendiente, en este caso $a = 3$.

Lo ayudaremos a hacerlo a través de las actividades que le proponemos a continuación.

NOTAS

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ACTIVIDADES

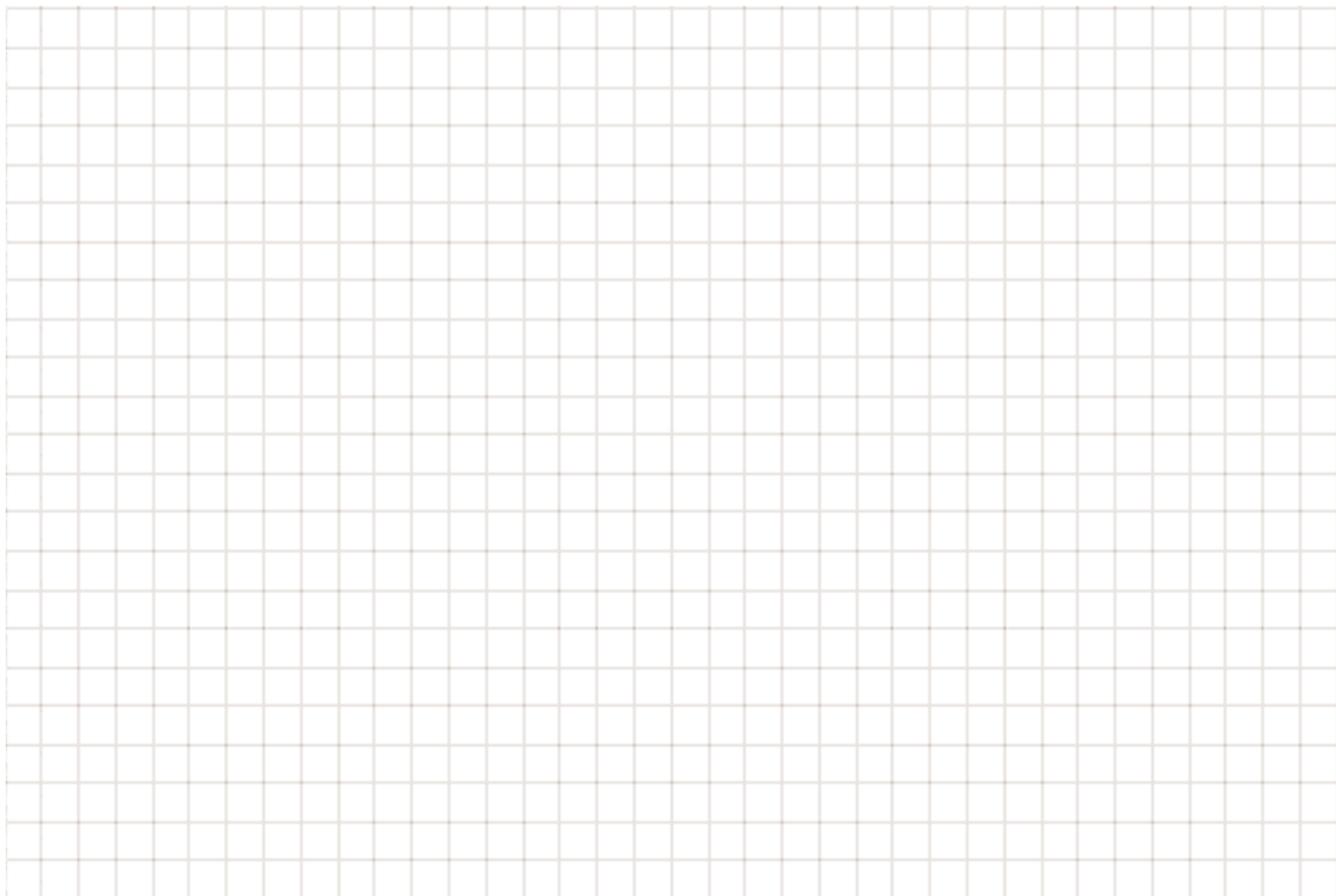


1. Ahora, en un sistema de coordenadas, siga las indicaciones siguientes y obtendrá la gráfica que se pide:

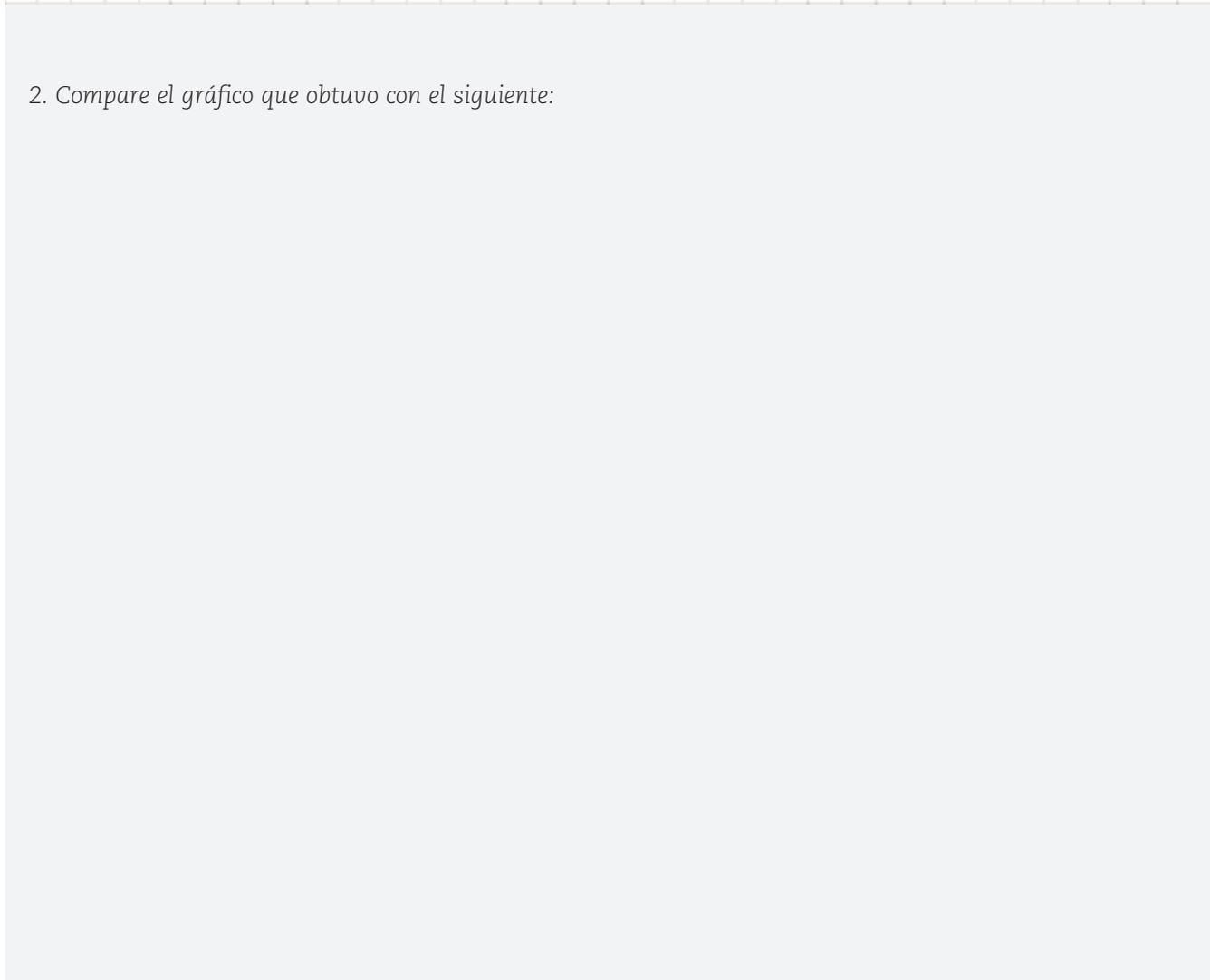
- a) Represente la **ordenada al origen** ubicando el punto **(0, b)** -en este caso (0, 2)- que se encuentra en el eje de las "y" por tener abscisa igual a cero. Es el punto donde la recta corta al eje vertical o "eje de las y".
- b) Ahora represente la **pendiente** de la recta que indica la inclinación de la misma respecto del eje x.

Como la pendiente, en este caso, es un número entero positivo a partir de la ordenada al origen, se toma una unidad de x hacia la derecha y a unidades hacia arriba, en este caso 3 unidades hacia arriba, y se señala otro punto que también pertenece a la recta que se desea representar gráficamente.

- c) Se conectan los dos puntos señalados por medio de una recta, obteniéndose de esta manera la gráfica de la recta cuya ecuación explícita es $y = 3x + 2$.



2. Compare el gráfico que obtuvo con el siguiente:



Situación 4

NOTAS

Represente en un sistema de coordenadas la recta correspondiente a la ecuación: $y = -2x + 3$

Para representar dicha recta usted puede primero identificar el valor de la ordenada al origen. ¿Cuál es? En este caso es $b = \dots$, y luego la pendiente, en este caso $a = \dots$.

Ahora, en un sistema de coordenadas, siga las indicaciones siguientes y obtendrá la gráfica que se pide:

1. Represente la ordenada al origen ubicando el punto $(0,b)$ - en este caso (\dots, \dots) : que se encuentra en el eje de las y por tener abscisa igual a cero. Es un punto de la recta; precisamente, es el punto donde la recta corta al eje vertical o "eje de las y ".

2. Represente la pendiente de la recta que indica la inclinación de la recta respecto del eje x . La pendiente es un número entero, ¿de qué signo en este caso? Entonces, a partir de la ordenada al origen, tome una unidad de x hacia la derecha y a unidades, en este caso 2 unidades, ¿hacia dónde, hacia arriba o hacia abajo? Finalmente, se señala el punto correspondiente, punto que también pertenece a la recta que se desea representar gráficamente.

3. Conecte los dos puntos señalados por medio de una recta, obteniendo la siguiente representación de la misma, cuya ecuación es: $y = -2x + 3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

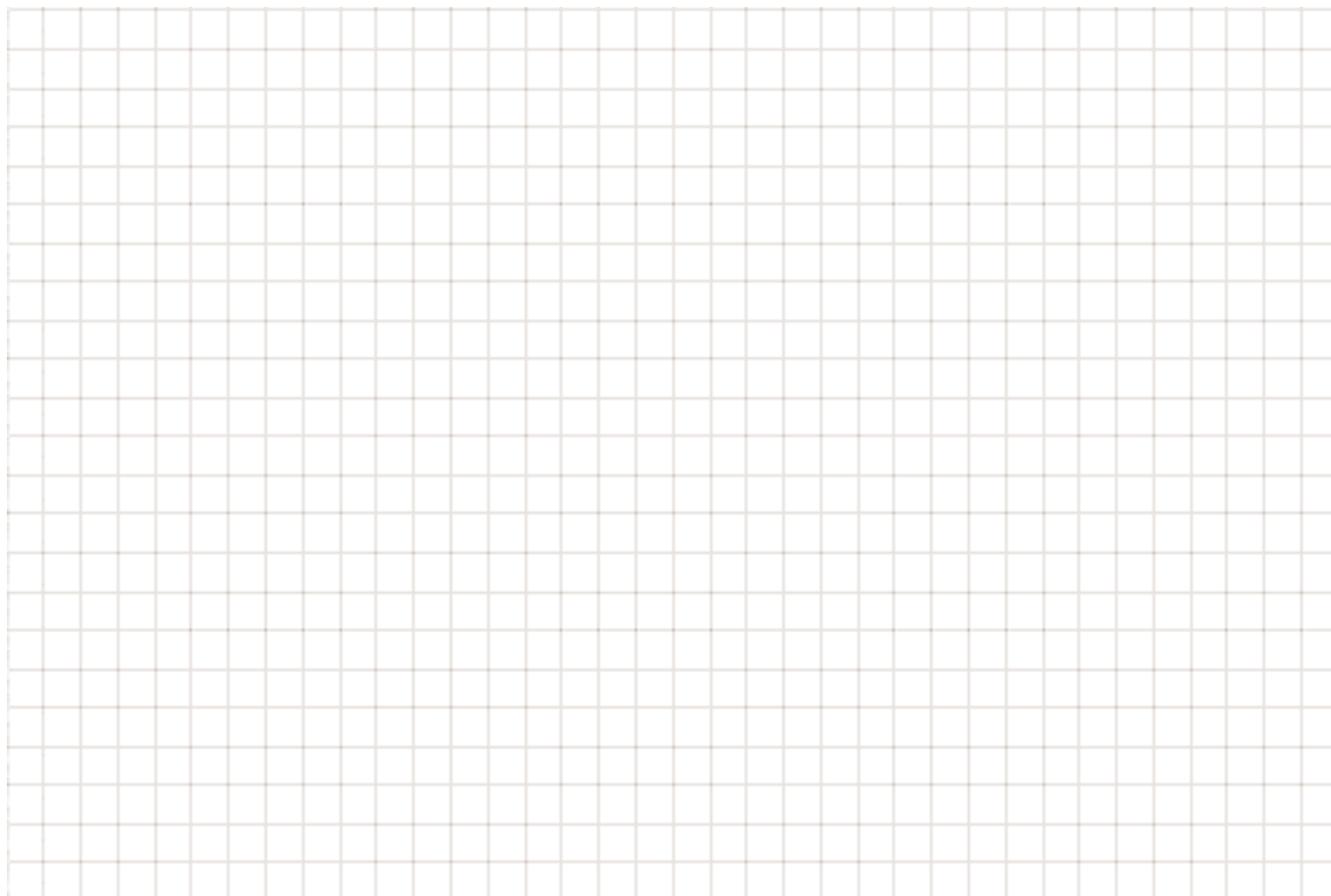
.....

.....

.....

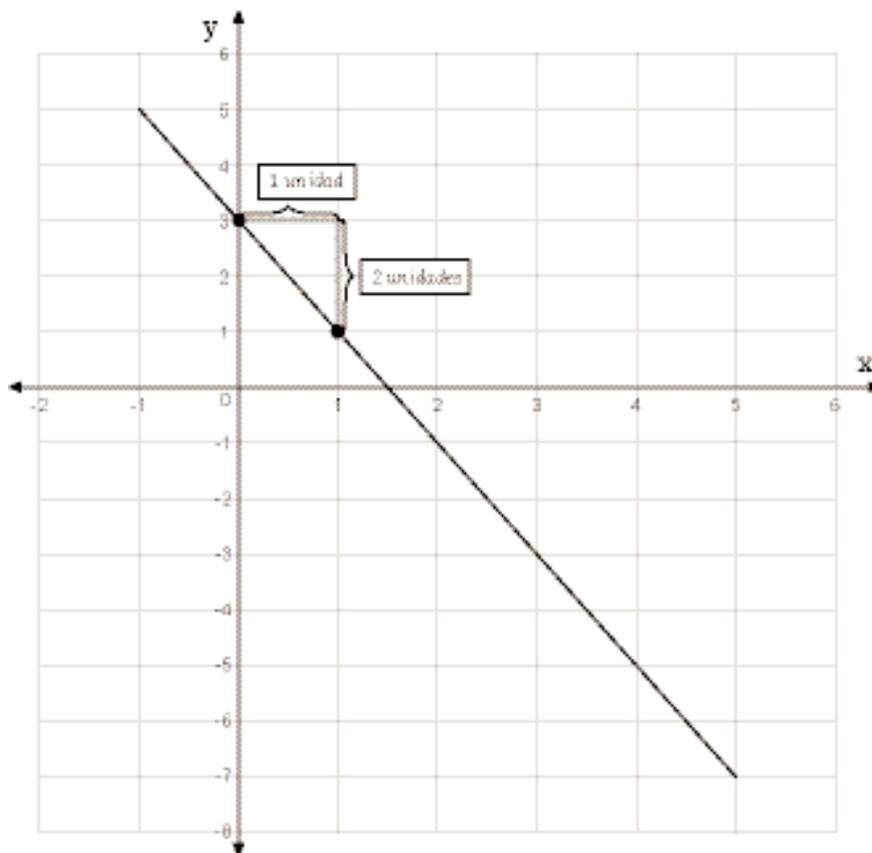
.....

.....



NOTAS

Compare el gráfico que obtuvo con el siguiente:



PENSAR

Cuando se representa gráficamente en un sistema de coordenadas una recta a partir de su fórmula explícita, $y = a \cdot x + b$, se identifica el valor correspondiente a la ordenada al origen y a la pendiente y se procede de la siguiente forma:

1. Se representa la ordenada al origen ubicando el punto $(0,b)$ que se encuentra en el eje "de las y" por tener abscisa igual a cero. Es un punto de la recta, precisamente el punto donde la recta corta al eje vertical o "eje de las y".

2. Se representa la pendiente de la recta que indica la inclinación de la recta respecto del eje x. Para lo cual hay que considerar dos situaciones:

- Si la pendiente es un número entero positivo: a partir de la ordenada al origen se toma una unidad de x hacia la derecha y "a" unidades hacia arriba y se señala el punto correspondiente a esa posición, que es otro punto perteneciente a la recta.

- Si la pendiente es un número entero negativo: a partir de la ordenada al origen se toma una unidad de x hacia la derecha y "a" unidades hacia abajo y se señala el punto correspondiente a esa

posición, que es otro punto perteneciente a la recta.

3. Se conectan los dos puntos señalados por medio de una recta.



ACTIVIDADES

1. Represente en un sistema de coordenadas cada una de las siguientes rectas dadas a través de su ecuación explícita:

a) $y = 2 \cdot x - 5$

b) $y = -3x + 2$

c) $y = 4 + 6 \cdot x$

d) $y = -5 - 4 \cdot x$

GRÁFICOS DE FUNCIONES

Crecimiento. Decrecimiento. Incrementos. Máximos y mínimos.

En muchas ocasiones, en la vida cotidiana encontramos descripciones de situaciones variadas; como por ejemplo el consumo de luz en función del tiempo transcurrido (meses del año), el registro de las medidas de las temperaturas a distintas horas del día, el número de autos vendidos por mes, el dinero invertido en exportaciones por año y así se podrían seguir nombrando ejemplos.

Situaciones como las consideradas son analizadas matemáticamente como funciones. De esta manera es posible analizar las variaciones de consumo: las variaciones en las exportaciones, por nombrar algunos ejemplos.

Las funciones son herramientas poderosas que sirven para estudiar y **modelizar**, es decir interpretar matemáticamente en forma algebraica y/o gráfica distintos fenómenos de la naturaleza: sociales, y que a su vez permiten sacar conclusiones y realizar predicciones.

En las situaciones antes ejemplificadas siempre intervienen dos variables, o bien podemos decir que en esas situaciones podemos establecer una relación entre dos variables consideradas: consumo de luz y tiempo transcurrido; medidas de temperaturas y horas del día: número de autos vendidos y el tiempo en meses. Estas variables reciben el nombre de:

- Variable **dependiente** (consumo de luz, medidas de temperatura, número de autos vendidos).

modelizar



Encontrar un modelo matemático (función, expresión algebraica, gráfica, etc.) que permita describir e interpretar perfectamente fenómenos que se presentan en la vida cotidiana o en la realidad. De esta manera es posible estudiar este fenómeno de una manera matemática, desprovisto de detalles y características que dificultarían su análisis.

NOTAS

- Variable **independiente** (tiempo transcurrido, tiempo expresado en horas del día, tiempo expresado en meses del año).

El consumo de luz es una variable dependiente porque depende del tiempo en que se considere el nivel de consumo. No es lo mismo el consumo durante un mes que el consumo durante una semana. Es decir, que el consumo de luz depende de la cantidad de tiempo que se considere.

Como vimos antes, a la variable independiente se la simboliza con la letra "x" y a la variable dependiente con la letra "y". Si la relación que existe entre las variables x e y es tal que para cada valor de x, existe uno y sólo un valor de y, que le corresponde en dicha relación, entonces la relación recibe el nombre especial de **función**.



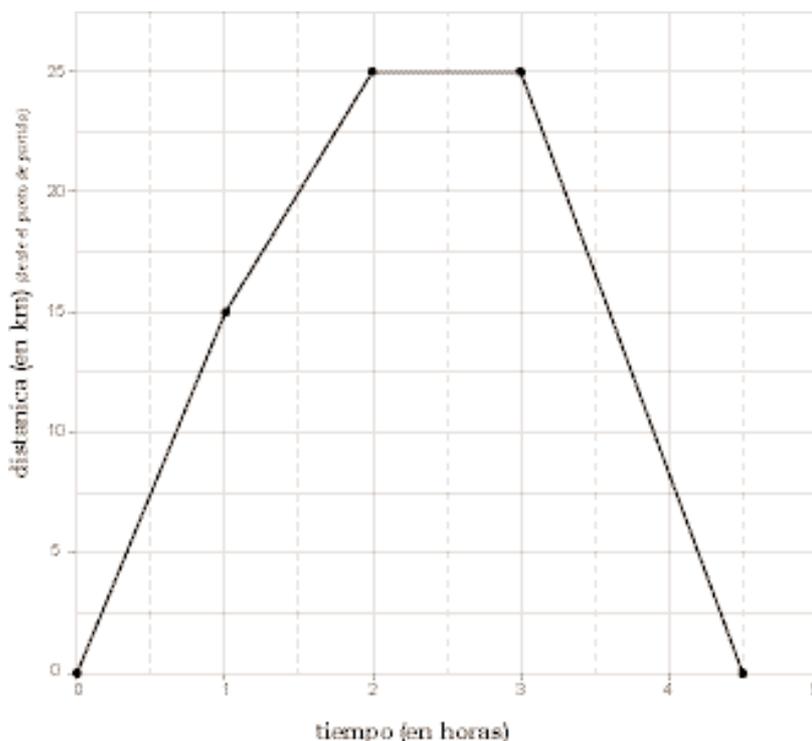
RECORDAR

La relación en la que a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente, llamada imagen, es una función.

Analice la siguiente situación y podrá realizar algunas observaciones.

Situación 1

Un deportista realizó una práctica en bicicleta, subiendo y bajando por una cuesta. En el gráfico se muestra la distancia a la que se encontraba el deportista con respecto al inicio del camino, en función del tiempo.





ACTIVIDADES

1. Le proponemos responder las siguientes preguntas a partir de la observación del gráfico:

a) ¿Qué variable se representó en el eje horizontal?, ¿y en el vertical?

.....

b) ¿Cuánto tiempo duró la práctica del ciclista?

.....

c) ¿A qué distancia se encuentra la cima de la cuesta respecto del punto de partida?

.....

d) ¿Cuánto tiempo empleó para llegar a la cima?

.....

RECORDAR



En los gráficos se representan, en el eje de las abscisas, (**x**) los valores asignados a la variable independiente y en el eje de las ordenadas (**y**) los valores asignados a la variable dependiente.

En esta situación se ha representado la distancia recorrida por un ciclista desde el punto de inicio en función del tiempo de marcha. De las dos variables que intervienen la **distancia** es la **variable dependiente** (**y**) y el **tiempo** transcurrido desde el inicio de la práctica del deportista es la **variable independiente** (**x**).

Puede decirse que a cada medida de la cantidad de tiempo transcurrido desde el inicio de la práctica le corresponde un único número que indica la distancia recorrida desde el punto de inicio de la práctica hasta ese momento. Es por ello que la relación representada es una función.

PENSAR



Si existe una relación entre dos variables, por ejemplo **x** e **y**, en la que a cada valor de la variable independiente **x** le corresponde un único valor a la variable dependiente **y**, entonces esa relación es una función. En este caso se dice que "**y es función de x**" y se simboliza $y = f(x)$, siendo **f** el nombre de la función.

En forma general, si se considera que los valores de la variable independiente (**x**) forman un conjunto y que cada uno de

NOTAS

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

NOTAS

dichos valores está vinculado con un elemento o valor de la variable dependiente (**y**) pertenecientes a un segundo conjunto, entonces es posible expresar que existe una relación entre dos conjuntos o bien entre los elementos de dichos conjuntos. Se puede definir una función de la siguiente manera:

A una **relación definida entre dos conjuntos** la llamamos función cuando a cada valor de la variable independiente (valor de **x** perteneciente al primer conjunto) le corresponde un único valor de la variable dependiente (valor de **y** perteneciente al segundo conjunto). En este caso se dice que "**y es función de x**", y se simboliza $y = f(x)$, siendo **f** el nombre de la función.

También podemos decir que: **a una relación la llamamos función cuando a cada valor de la variable independiente (valor de x) le corresponde un único valor de la variable dependiente (valor de y).**

Las funciones se simbolizan con letras imprenta minúscula como **f, g, h**.

En la situación 1 se dice que la distancia recorrida por el ciclista es función del tiempo transcurrido desde el inicio de la práctica.

Así podemos interpretar, en la situación 1 analizada, que:

- La práctica duró cuatro horas y media (4,5 hs).
- Tardó dos horas en llegar a la cima de la cuesta, en la que se detuvo por una hora (en el transcurso de la 2º hora y 3º hora).
- La cima se encuentra a 25 km. del punto de partida de la práctica.
- Demoró una hora y media (1,5 hs) en bajar y así llegar al comienzo del recorrido.
- El tiempo empleado para volver fue menor al empleado para subir la cuesta. Esto significa que la medida de la velocidad promedio de descenso fue mayor.
- El tiempo **varía** entre 0 y 4,5 hs.
- La distancia **varía** entre 0 y 25 km.

A continuación le proponemos analizar e interpretar otras situaciones a partir de las gráficas en las que se relacionan dos variables numéricas.

Situación 2

Se muestra la variación en la temperatura ambiente de un pueblo a medida que transcurre el tiempo.

NOTAS

Luego, podemos decir:

- La **máxima** temperatura está dada por los 10° C registrados a la hora 4, es decir que la mayor de las medidas de temperatura es 10.
- La temperatura **mínima** es de 5° C registrada en la hora 7, es decir que la menor de las medidas de temperatura es 5.
- La temperatura varía entre 5° C y 10° C.
- El tiempo durante el que se registraron los valores de temperatura fue de 9 horas.
- En ese lapso de tiempo se puede hallar cualquier valor de la temperatura. Por ejemplo; después de 2 horas la temperatura es de 8° C y después de 2,5 horas la temperatura es de 8,5° C. Los valores que puede tomar la temperatura en cualquier momento del lapso de tiempo considerado (9hs) son valores reales intermedios que varían entre 5 y 10. El conjunto de todos esos valores se denomina **imagen de la función** y lo podemos simbolizar mediante el intervalo de números reales cerrado (intervalo real) [5, 10].
- De la misma manera, como el tiempo varía entre 0 h y 9 h (con sus valores reales intermedios), podemos decir que el **dominio de la función** está dado por el intervalo real cerrado [0,9].



PENSAR

El dominio de la función es el conjunto de valores de la variable independiente x a los cuales le corresponde algún valor de la variable dependiente y . Se simboliza: $D(f)$, se lee: dominio de la función f .

La imagen de la función es el conjunto de valores que toma la variable dependiente y , se simboliza: $Im(f)$ y se lee: imagen de la función f .



ACTIVIDADES

1. Completen:

a) El dominio de la función representada en la situación 1 es: $D(f) = \dots\dots\dots$

b) La imagen de la función representada en la situación 1 es: $Im(f) = \dots\dots\dots$

NOTAS

- La función es **decreciente** de 4 hs a 7 hs, puesto que a medida que aumenta el tiempo la temperatura disminuye (en el gráfico la curva que representa esta disminución de temperatura es descendente, es decir que la curva "baja") desde 10° C a 5° C. Por lo tanto el **incremento** (o variación) de la función es de -5° C. Note que el incremento se considera negativo para indicar que la temperatura bajó durante ese período de tiempo.

- La función tiene un **máximo**.

Observando la gráfica, determine cuál es el punto donde la función toma un valor máximo; un valor que resulta ser mayor que cualquier otro valor que tomen los puntos de la función que le rodean.

¿Cuáles son las coordenadas de dicho punto?.....

¿La función (recuerde observar la gráfica siempre de izquierda a derecha) crece hasta alcanzar dicho punto y decrece después de alcanzarlo?

¿Por qué?

Cuando un punto tiene estas características se dice que dicho punto es un **máximo** de la función. En este ejemplo el punto (4, 10) es un máximo. También se dice que en $x = 4$ la función alcanza un valor máximo, que en este ejemplo indica la mayor de las medidas de temperatura registradas en dicho pueblo.

- La función tiene un **mínimo**.

Observe nuevamente el gráfico y determine cuál es el punto en el que la función toma un valor que resulta ser menor que cualquier otro valor que tomen los puntos de la función que le rodean.

¿Cuáles son las coordenadas de dicho punto?.....

¿La función decrece hasta alcanzar dicho punto y crece después de alcanzarlo?

Cuando un punto tiene estas características se dice que dicho punto es un **mínimo**. En este ejemplo, el punto (7,5) es un mínimo. También se dice que en $x = 7$ la función alcanza un valor mínimo, que en este ejemplo indica la menor de las medidas de temperatura registradas en dicho pueblo.



PENSAR

Para analizar la variaciones de una función la gráfica de la misma debe ser observada siempre de izquierda a derecha.

NOTAS

Una función es creciente cuando al aumentar los valores que toma la variable independiente "x", aumenta los valores que toma la variable dependiente "y".

Una función es decreciente cuando al aumentar los valores que toma la variable independiente, disminuyen los valores que toma la variable dependiente.

Una función es constante cuando al aumentar los valores que toma la variable independiente "x", los valores que toma la variable dependiente "y" siempre son iguales, es decir que no hay ninguna variación: siempre la función toma el mismo valor.

Intervalo de crecimiento: es una parte (un intervalo) del dominio de la función f, donde la función es creciente. Lo simbolizamos: I_c .

Intervalo de decrecimiento: es una parte (un intervalo) del dominio de la función f, donde la función es decreciente. Lo simbolizamos: I_d .

Un punto es un máximo de la función si el valor de la función en dicho punto es menor que cualquier otro valor que la función tome en otros puntos. Además, la función decrece hasta alcanzar el punto máximo y crece después de haberlo alcanzado.

Un punto es un mínimo de la función si el valor de la función en dicho punto es mayor que cualquier otro valor que la función tome en otros puntos. Además la función crece hasta alcanzar el punto máximo y decrece después de haberlo alcanzado.

Así entonces, teniendo en cuenta el gráfico anterior (de las temperaturas) decimos que:

El Intervalo de crecimiento de la función es: $I_c = (1,4) \cup (7,9)$

El Intervalo de decrecimiento de la función: $I_d = (4,7)$

RECORDAR

Tenga en cuenta que los intervalos de crecimiento o decrecimiento son intervalos abiertos y por ser subconjuntos del dominio, están dados para valores de x.



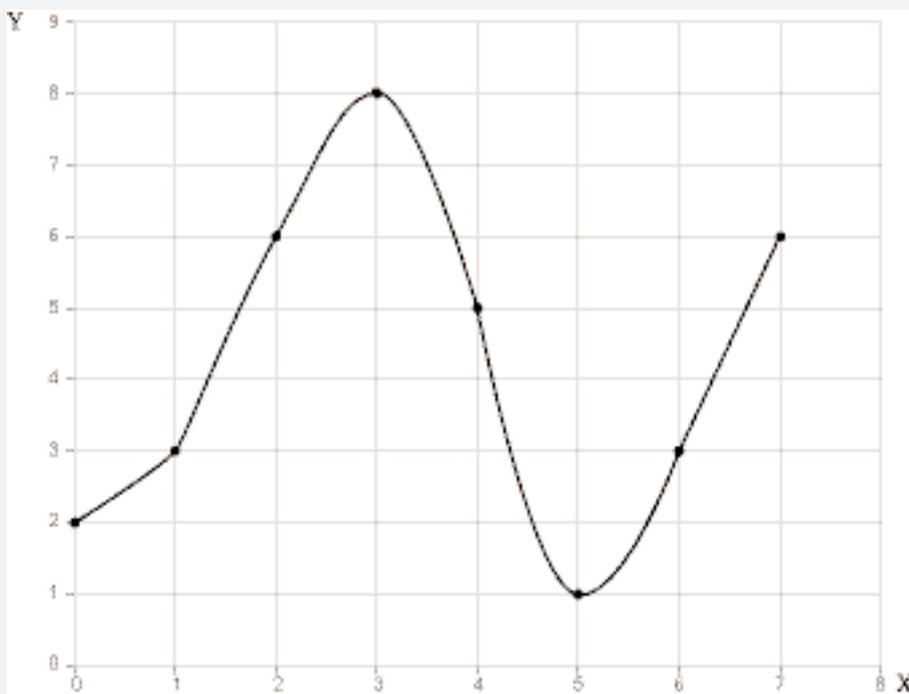
ACTIVIDADES

1. Teniendo en cuenta el gráfico de la situación 1 (del deportista), contesten:

a) ¿Cuál es el intervalo de crecimiento de la función? $I_c = \dots\dots\dots$

- b) El incremento en el intervalo de la pregunta a) es:
- c) ¿Cuál es el intervalo de decrecimiento de la función? $I_d =$
- d) El incremento en el intervalo de la pregunta b) es:
- e) ¿En qué intervalo la función es constante?

2. Analicen el siguiente gráfico correspondiente a una función y contesten:



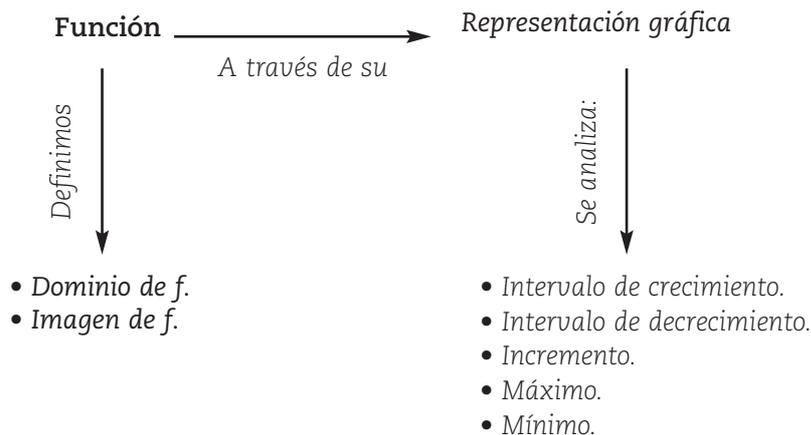
- a) ¿Cuáles son las coordenadas del máximo de la función?
- b) ¿Cuáles son las coordenadas del mínimo de la función?
- c) ¿Cuál es el intervalo de crecimiento de la función? $I_c =$
- d) ¿Cuál es el incremento en el intervalo (0, 3)?
- e) ¿Cuál es el incremento en el intervalo (5, 7)?
- f) ¿Cuál es el intervalo de decrecimiento de la función? $I_d =$
- g) El incremento en el intervalo de la pregunta anterior es:

3. Responder

- a) En un intervalo de crecimiento de la función el incremento es ¿positivo o negativo?
- b) En un intervalo de decrecimiento de la función el incremento es ¿positivo o negativo?

Recapitulemos. Mostramos lo hecho hasta ahora en el siguiente cuadro:

NOTAS



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

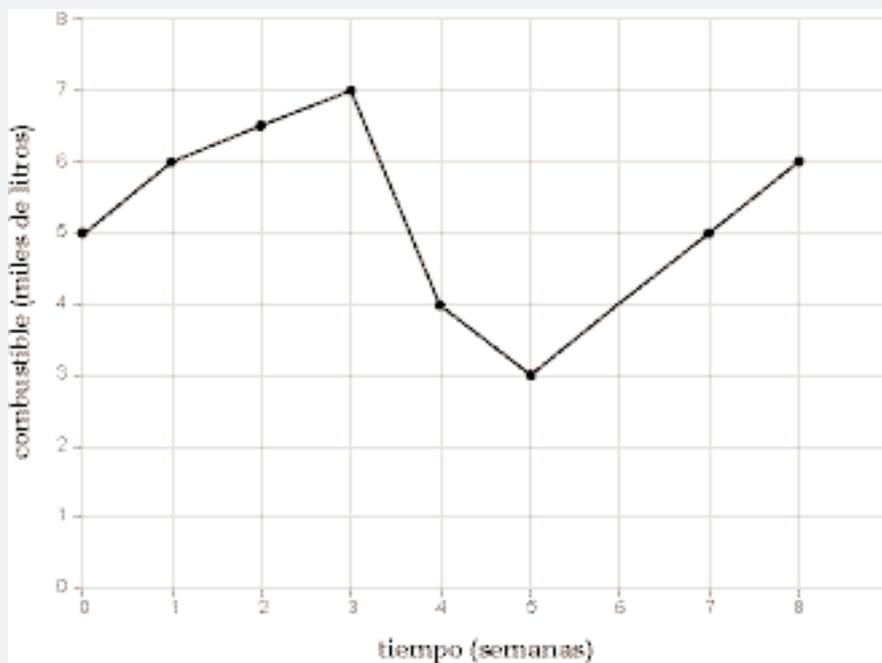
.....



ACTIVIDADES

Le proponemos la siguiente actividad para sintetizar lo que hemos analizado respecto de función.

En una estación de venta de combustible se realiza una medición semanal de la cantidad existente de nafta súper, que se representa en el siguiente cuadro:



1. Responda

- a) ¿Cuál es el dominio de la función?
- b) ¿Cuál es la imagen de la función?
- c) ¿Cuáles son las coordenadas del máximo de la función?
- d) ¿Cuáles son las coordenadas del mínimo de la función?

b) Por esa característica ¿qué nombre reciben este tipo de funciones? Escríbalo.

NOTAS

- Al estar los puntos alineados se ha representado una **función lineal**.
- Como el centro de coordenadas (0, 0) pertenece a la recta que determina dichos puntos, entonces la recta "pasa" por dicho punto.
- Observe que, además, si la velocidad aumenta el doble, el espacio recorrido también aumenta el doble. Por ejemplo, si la velocidad aumenta de 20km/h a 40km/h el espacio aumenta de 6m a 12m. Usted también podrá observar que si la velocidad aumenta el triple el espacio también aumenta el triple. Diremos entonces que se producen variaciones del espacio "proporcionales" a las variaciones de velocidad y que dichas variaciones se producen en forma "directamente proporcional". Esto nos permite decir que: la representación gráfica que estamos analizando **corresponde a una función de proporcionalidad directa**.

Diremos que entre las variables "el espacio de reacción" y "la velocidad del automóvil" existe una relación funcional de proporcionalidad directa o más sintéticamente, que las variables que intervienen son directamente proporcionales.

RECORDAR



- En una función de proporcionalidad directa, en general, si aumenta el valor de una variable el valor de la otra aumenta en igual proporción, y viceversa. Por ejemplo, si el valor de la variable x se duplica, el valor de la variable y también se duplica, y viceversa.
- Además, sabemos que el cociente de los valores correspondientes de ambas variables es un valor constante: $k = \frac{y}{x}$.

Para recordar características de una función de proporcionalidad directa le proponemos la siguiente actividad:

ACTIVIDADES



1. A partir del gráfico anterior:
 - a) Completar la siguiente tabla de valores:

Velocidad (km/h)	Espacio de reacción (metros)
0
20	6
40
80
.....	42
160

b) ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad? $k = \dots\dots\dots$

c) Sabiendo que la fórmula de la función de proporcionalidad directa es $y = k \cdot x$, ¿cuál es, la expresión de la fórmula de la función que en este caso le permite calcular el espacio de reacción en función de la velocidad?

$y = \dots\dots\dots$

d) ¿Qué ocurre con la distancia recorrida (espacio de reacción), si se duplica la medida de la velocidad?

.....

.....

.....

e) ¿Para qué valor de x el valor que toma la función es cero; es decir qué valor tiene x , para que $f(x) = 0$?

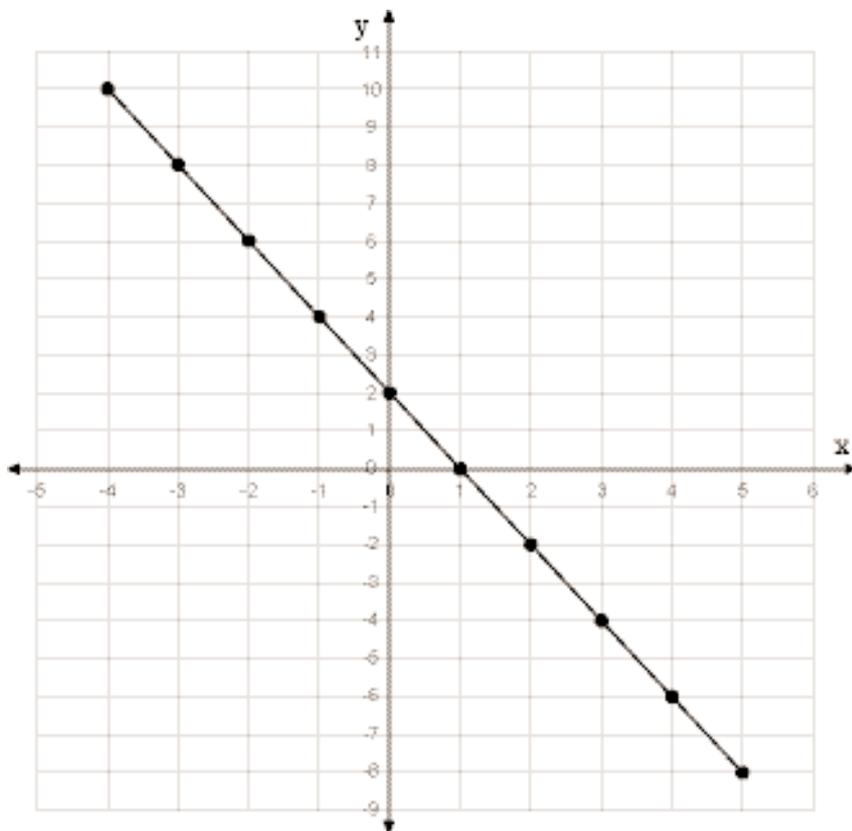
Vemos que si la velocidad del auto es de 0 km/h, entonces el espacio de reacción es 0 m, debido a que el auto ya está detenido.

En símbolos: si $x = 0$ y $f(0) = 0$, entonces decimos que $x = 0$ es un cero o raíz de la función porque la imagen de dicho valor de x es cero.

Situación 2

La tabla siguiente muestra algunos valores de la función lineal definida de \mathbb{R} en \mathbb{R} , cuya fórmula es: $y = -2x + 2$.

Complete la tabla con los valores que faltan:



x	$y = -2x + 2$
-2	$y = -2 \cdot (-2) + 2 = 6$
-1	$y = -2 \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
0	$y = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
1	$y = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
2	$y = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
3	$y = -2 \cdot 3 + 2 = -4$

ACTIVIDADES



1. Observe y analice la gráfica realizando lo siguiente: a) marque con un color el punto de intersección de la gráfica de la función con el eje de las abscisas; b) indique las coordenadas (x, y) de dicho punto:

c) Entonces, ¿para qué valor de x la gráfica "corta" al eje de las abscisas? $x = \dots\dots\dots$

d) ¿Para qué valor de x la función toma el valor 0, es decir qué valor de x tiene como imagen el cero?

Luego, podemos decir que si $f(1) = 0$, entonces $x = 1$ es un cero o raíz de la función, porque la imagen que la función le asigna al 1 es 0.

e) Indique si la función es creciente o decreciente.

f) ¿Representa una función de proporcionalidad directa? ¿Por qué?

g) ¿Cuál es el dominio de dicha función?

h) A partir del análisis de la fórmula, escriba: la ordenada al origen y la pendiente:

.....

Posiblemente observó que:

- Se ha representado una función lineal que es decreciente.
- No representa una proporcionalidad directa. Entre otras cosas, la recta no contiene al origen de coordenadas.

NOTAS

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

- En la tabla se han consignado algunos valores, pero recordemos que su dominio es el conjunto de los números reales (\mathbb{R}).
- La ordenada al origen es 2.
- La pendiente es -2.
- La gráfica de la función corta al eje de las abscisas en $x = 1$, es decir que la imagen de $x = 1$ es 0. Lo anotamos $f(1) = 0$ y entonces $x = 1$ es un cero o raíz de la función.



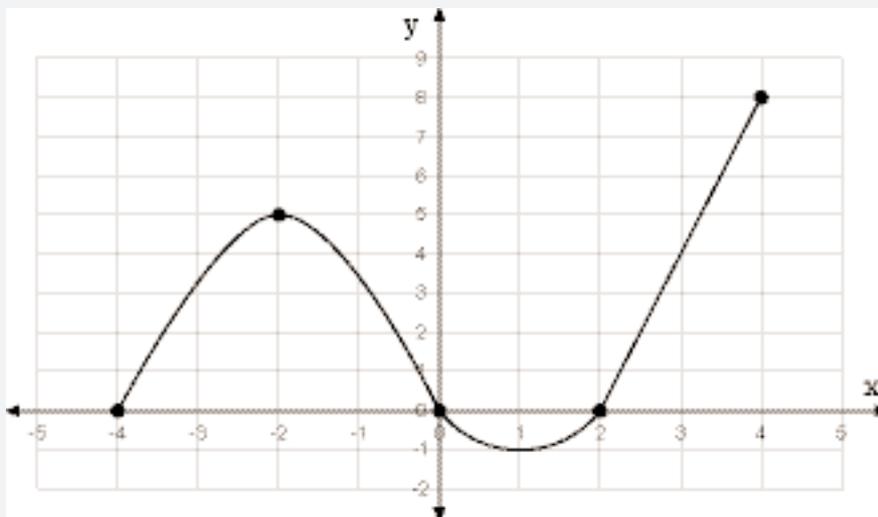
PENSAR

Se llaman ceros o raíces de una función a aquellos valores del dominio cuya imagen es cero. (Nota: según la función, ésta puede tener una raíz, varias o ninguna).



ACTIVIDADES

1. A partir del siguiente gráfico, que representa una función, le pedimos:



- a) Indique los intervalos de crecimiento.
- b) Indique los intervalos de decrecimiento.
- c) Marque con un color el punto donde se encuentra el mínimo de la función. Escriba las coordenadas de dicho punto:

.....

d) ¿Cuántos ceros (o raíces) presenta esta función? ¿Cuáles son? Escriba las coordenadas de esos puntos:

.....

Compare sus respuestas con las siguientes observaciones:

NOTAS

- Es **creciente** en el intervalo $(-4,-2) \cup (1,4)$.

- Es **decreciente** en el intervalo $(-2,1)$.

- Presenta un **mínimo** en el $x=1$. El valor del mínimo es $f(1)=-1$.

El punto de coordenadas $(1,-1)$ es un **mínimo** de la función.

- La gráfica corta al eje horizontal en $x_1=-4$, $x_2=0$ y en $x_3=2$. Por ello se tiene:

$$f(-4) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 0$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

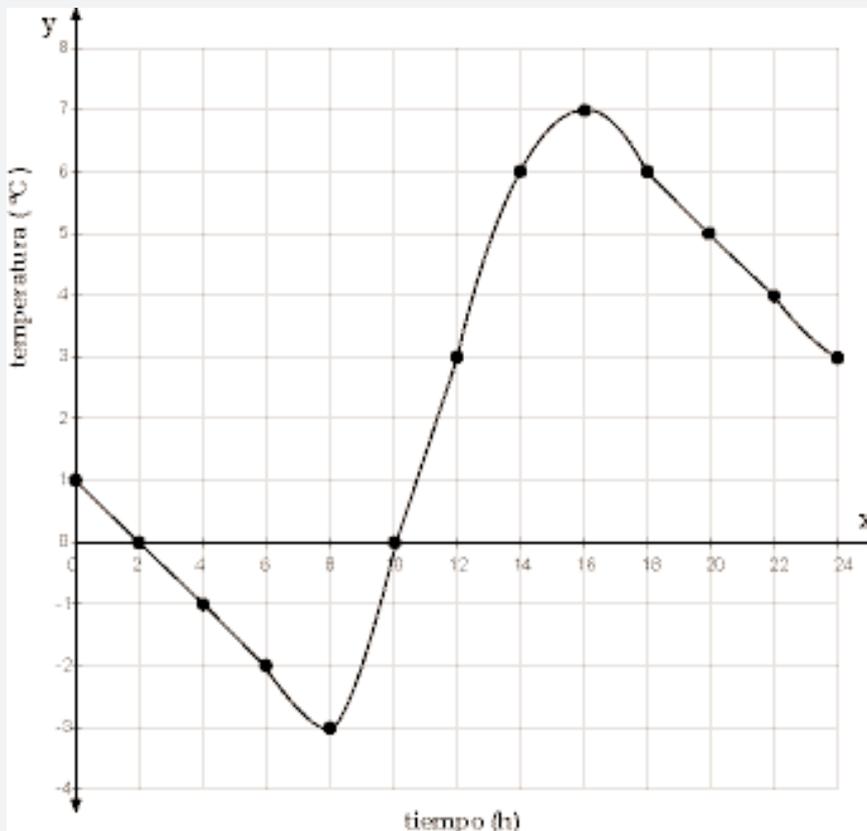
.....

Hay tres valores de x para los cuales la función toma el valor cero, tres valores de x cuyas imágenes son iguales a cero. Por ello decimos que la función tiene tres ceros o raíces: $x_1=-4$, $x_2=0$ y $x_3=2$.

ACTIVIDADES



1. En una finca, ubicada en una zona cuyo clima es bastante estable, se ha medido la temperatura durante un día, para establecer durante qué horas aproximadamente hay que proteger los frutales de la helada. Con dicha información se confeccionó el siguiente gráfico que muestra la variación de la temperatura en función del tiempo expresado en horas. Observen el gráfico, completen y responden según lo que corresponda.



a) ¿A qué hora se registra la temperatura máxima? A este punto se lo denomina el de la función. ¿Cuáles son sus coordenadas?

b) ¿A qué hora se registra la temperatura mínima? A este punto se lo denomina el de la función. ¿Cuáles son sus coordenadas?

c) ¿Durante qué horas la temperatura aumenta? ¿Cuál es el Intervalo de crecimiento de la función? $I_c =$

d) ¿Cuántos ceros (o raíces) presenta esta función? ¿Cuáles son? Escriba las coordenadas de esos puntos

.....

e) Si se considera que los frutales deben ser protegidos cuando la temperatura es de 0° o inferior a dicho valor y según la información mostrada en el gráfico, ¿durante qué período de tiempo hay que cuidarlos?

.....

.....

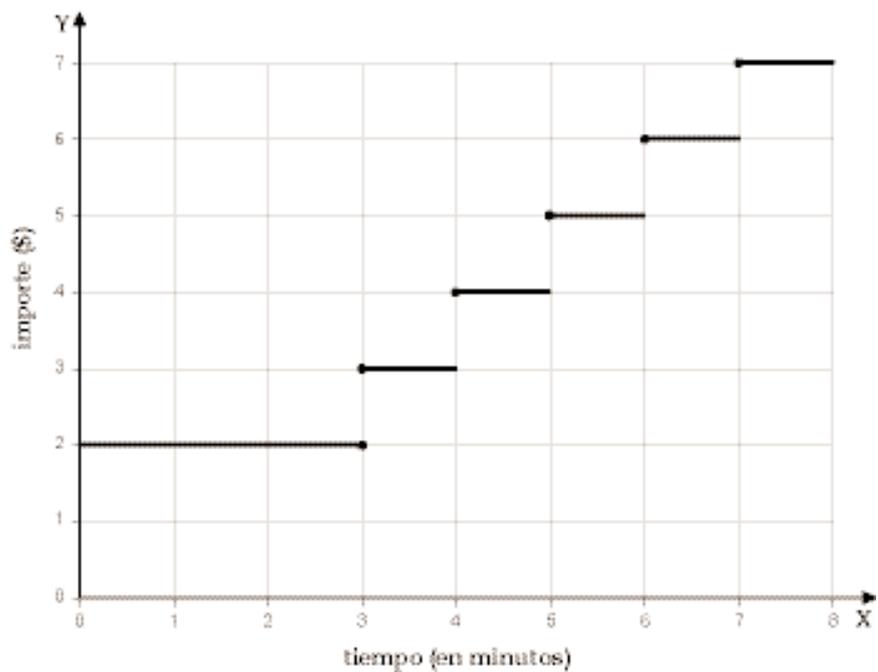
.....

NOTAS

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Situación 3

Se muestra el gráfico de una función que indica lo que hay que pagar (en pesos) de acuerdo con los minutos que se hable por teléfono cuando se hacen llamadas de larga distancia desde una cabina telefónica.



NOTAS

- Cuando se efectúa la llamada, se paga, en un principio, \$2 pudiendo hablar hasta 3 minutos.
- Luego, por cada nuevo minuto que se hable, se paga \$1 más y, por lo tanto, el gráfico presenta un salto.
- A este tipo de función se la llama escalonada.

Los gráficos presentados en las situaciones 1 y 2 y el de la actividad 3 no presentan saltos ni cortes, pueden recorrerse con un lápiz sin tener que levantarlo del papel. Cuando esto ocurre estas funciones son **funciones continuas**.

Lo analizado anteriormente no ocurre para la situación 3, en la que sí se presentan "saltos". Ésta es una **función discontinua**.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

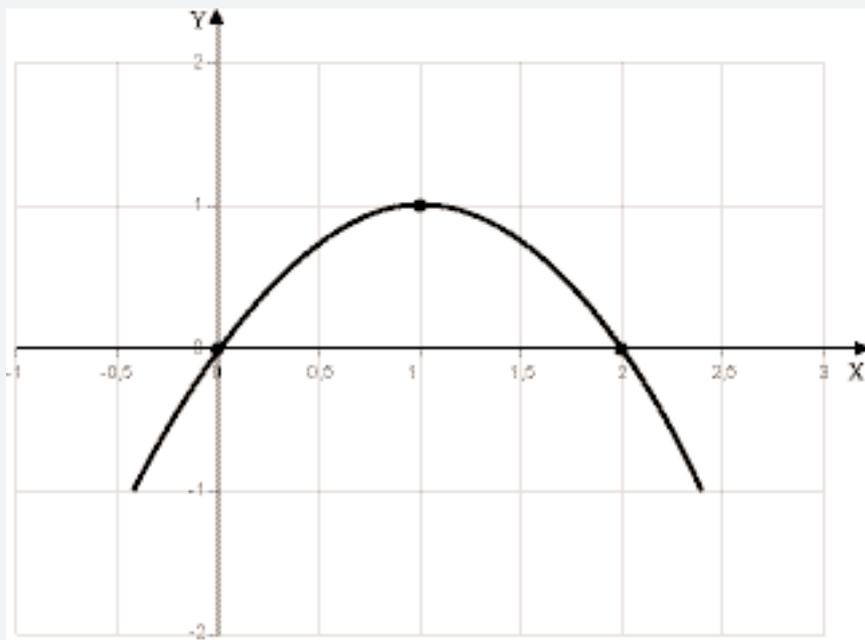
.....

.....



ACTIVIDADES

1. La siguiente gráfica es una parábola. Su dominio es \mathbb{R} , pero sólo se ha representado una parte de la misma.



Ésta, corta al eje x en dos puntos, es decir que la función presenta dos ceros o raíces:

a) ¿Cuáles son las coordenadas de dichos puntos?

x1 (.....) x2 (.....)

b) ¿Es una función continua? ¿Por qué?

c) ¿Cuál es el máximo de la función?

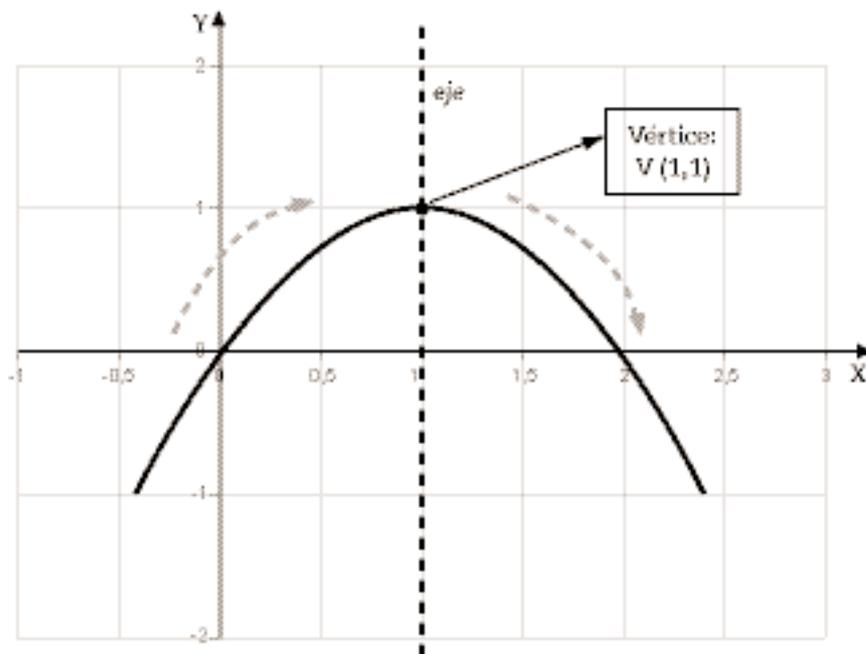
NOTAS

La fórmula de la función de esta gráfica es: $y = x \cdot (2 - x)$
 Si en la expresión anterior se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, queda:

$$y = 2x - x^2$$

Observe que en el segundo miembro de la expresión de la fórmula de la función aparece un término en el que la x está elevada al cuadrado (a la dos). Por esta característica la función se llama **función cuadrática**.

Observe nuevamente la gráfica de la función cuadrática $y = 2x - x^2$ definida en \mathbb{R} y lea con atención la descripción que se realiza de la misma.



- Para los valores de x menores que 1 ($x < 1$), la función es **creciente**.
- Para los valores de x mayores que 1 ($x > 1$), la función es **decreciente**.
- Sus **ramas** están hacia abajo.
- El punto donde se encuentra el valor **máximo** de la parábola se denomina **vértice de la parábola**. Por el vértice se puede trazar una recta paralela al eje de ordenadas que se denomina **eje de la parábola**. La parábola es simétrica respecto a ese eje, es decir que la gráfica de la función tiene las mismas características a ambos lados del eje.

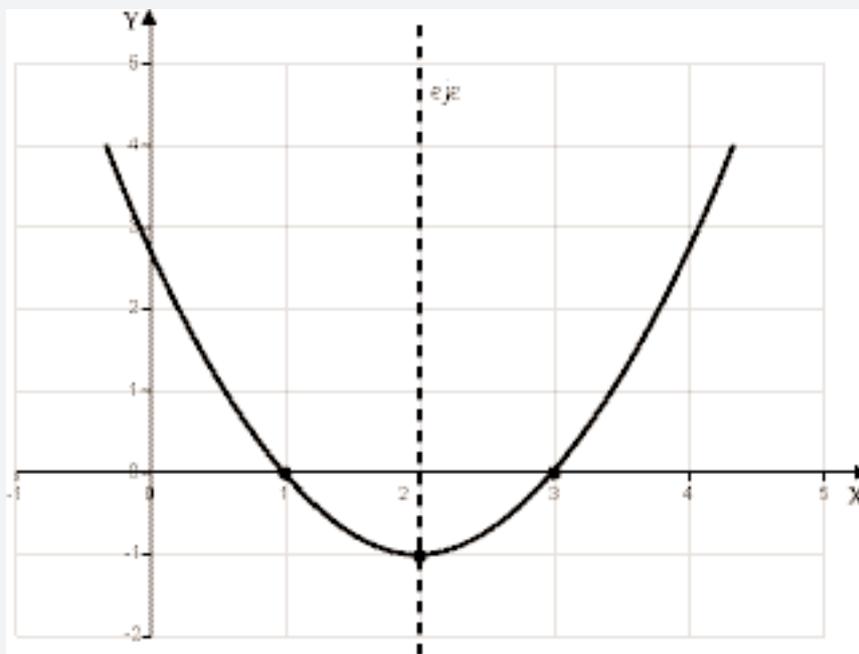


ACTIVIDADES

1. Le mostramos la representación de otra parábola, en la que sus ramas están hacia arriba. La fórmula de la

función definida en \mathbb{R} correspondiente a dicha parábola es: $y = x^2 - 4x + 3$

Lea con atención la descripción de la misma:



La parábola corta al eje x en dos puntos, es decir que la función presenta **dos ceros** o raíces:

¿Cuáles son? Escriba sus coordenadas:

x_1 (.....) x_2 (.....)

¿Es una función continua? ¿Por qué?

¿Cuál es el mínimo de la función?

Las coordenadas del vértice son: (.....,

Es decreciente para x 2.

Es creciente para x 2.

Considere la función f , cuya fórmula es: $y = \frac{6}{x}$, y complete la siguiente tabla de valores, para luego realizar el gráfico correspondiente:

x	$y = \frac{6}{x}$
-6	$y = \frac{6}{-6} = -1$
-3	$y = \frac{6}{-3} = \dots\dots$
-2	$y = \frac{6}{-2} = \dots\dots$
-1	$y = \frac{6}{-1} = -6$
1	$y = \frac{6}{1} = \dots\dots$
2	$y = \frac{6}{\dots\dots} = \dots\dots$
3	$y = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \dots\dots$
6	$y = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \dots\dots$

Observe la tabla y complete:

a) Los valores de la columna correspondientes a los valores que toma la variable "x" están ordenados de menor a mayor, es decir que "van aumentando". ¿Qué ocurre con los números que toma la variable "y", que son las imágenes correspondientes a los valores de "x"?

.....
.....

b) Realice todos los productos entre cada número que toma la variable "x" y su correspondiente imagen, valor que toma la variable "y". ¿Qué número obtiene en cada uno de dichos productos?

.....

c) ¿La variable x podría tomar el valor cero?

Es decir: ¿es posible resolver el cociente 6:0?. Si recuerda que la división, cuando es interpretada desde una situación concreta, está vinculada a repartir: ¿Es posible repartir, por ejemplo, "seis objetos entre nadie"?

NOTAS

- El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$, ya que **x no puede ser igual al número cero** por estar en el denominador.

Observe que el comportamiento de las variables que intervienen es tal que si los valores que va tomando una de ellas aumentan, las imágenes correspondientes van disminuyendo, pero en igual proporción (así por ejemplo, si un valor de la primer variable aumenta al doble, la imagen correspondiente a dicho valor disminuye a la mitad).

También pudo verificar que si se realizan los productos entre cada valor que toma la primer variable por su correspondiente imagen (número que corresponde a la segunda variable) da siempre un valor constante.

En esta situación buscamos recordar una función muy especial con estas características indicadas, ¿qué nombre reciben este tipo de funciones?

.....
.....

Si realiza el gráfico asociado a dicha función, cuya tabla de valores usted completó, obtendrá los puntos resaltados a continuación:

NOTAS



RECORDAR

• En una función de proporcionalidad inversa, en general, si aumenta el valor de una variable el valor de la otra disminuye en igual proporción y viceversa: por ejemplo, si el valor de la variable x se duplica el valor de la variable y disminuye a la mitad, y viceversa.

• Además, sabemos que el producto de los valores correspondientes de ambas variables es un valor constante: $x \cdot y = k$.

En esta situación se ha estudiado una función de proporcionalidad inversa en la que la constante es $k = 6$.

Nota

En el gráfico de una hipérbola, correspondiente a la gráfica de una función de proporcionalidad inversa, la curva se aproxima cada vez más a los ejes de coordenadas pero no "toca" a ninguno de ellos.



ACTIVIDADES

1. ¿Por qué la función cuya fórmula es: $y = \frac{6}{x}$, no es continua?

COMBINATORIA. PROBABILIDAD. ESTADÍSTICA

Cuando en la antigüedad se debía tomar alguna, decisión importante, se buscaba en la naturaleza signos aleatorios que revelaran la voluntad de los dioses. Luego de muchos siglos, y dado el interés por los juegos de azar, comienza el estudio de los fenómenos aleatorios (que dependen del azar). Para poder predecir sus resultados, se busca medir de alguna manera el grado de incertidumbre de los resultados de algunos de los fenómenos aleatorios. Actualmente, para estudiar con ciertos niveles de confianza dichos fenómenos aleatorios, contamos con la combinatoria, la teoría de probabilidades y la estadística.

Recuento de casos. Variaciones. Permutaciones. Combinaciones

Situación 1

La patente de un auto que intervino en un hecho delictivo fue observada por distintos testigos. Todos coinciden en que el número que corresponde a la misma es 464. Pero en relación a las



Se sabe que intervienen todas las vocales: a, e, i, o, u, pero no se sabe en qué orden.

Recuerde:
¿se pueden repetir las vocales en la misma clave?.....

¿De cuántas formas diferentes pudo haberse confeccionado la clave?

NOTAS

• Le pedimos que intente resolver esta situación, identificando los datos que pide el problema, representando de alguna manera la relación que existe entre ellos, ejemplificando: utilizando alguna fórmula. Luego de dar la respuesta en forma clara, le recomendamos que vuelva atrás y verifique lo hecho.

¿Llegó a dar la respuesta?

¿Lo hizo escribiendo **todas** las claves posibles? Si contestó que sí, ¿le resultó práctico el escribir todas las posibilidades?

¿Utilizó otra forma? ¿Cuál? Explique

No olvide que se pide **cuántas** y **no cuáles** son las claves posibles.

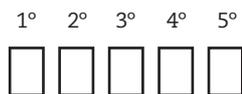
En conclusión

Podemos decir que en la situación 1 fue fácil encontrar la cantidad de patentes posibles, ya que el número de letras que intervienen en la misma era sólo "tres", pudiendo anotar todas las opciones. No ocurre así para la situación 2, en la que el número de letras de la clave es mayor que tres, y por lo tanto escribir todas las opciones era más tedioso.

¿Qué ocurriría si la clave fuera de **diez** letras distintas? Podría anotar todas las claves posibles, pero tardaría bastante en hacerlo, y lo más probable es que se olvide o repita alguna, o simplemente se canse y abandone el problema. En definitiva, tendríamos que encontrar una forma más ágil y práctica de resolver este tipo de problemas.

Así, nosotros le mostraremos un camino para resolver la situación 2:

• Representamos con casillas los lugares que ocuparán las vocales en la clave:



Recuerde que las letras de la clave son todas diferentes

NOTAS

Lo anotamos así:

Lugar	1°	2°	3°	4°	5°	Total
Posibilidades	5	4	3	2	1	120

Luego, multiplicamos los números que aparecen en las casillas: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Respuesta: la cantidad de claves posibles es 120.

Situación 3

Le pedimos que resuelva esta situación:

Cinco suboficiales, cuyos nombres son Martín, Natalia, Oscar, Patricia y Luis, se postulan para trabajar en la vigilancia de un predio. Para la custodia de dicho predio, se piden tres personas; es decir que sólo hay 3 vacantes que no pueden ser ocupadas por una misma persona: una para el turno mañana, otra para el turno tarde y la otra en el turno noche. Se quiere averiguar de cuántas formas distintas se pueden ocupar los 3 puestos con estas cinco personas.

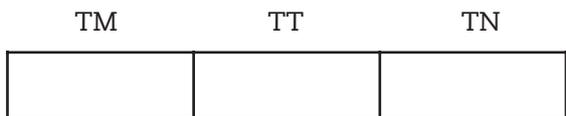
Verifique su respuesta con lo que nosotros le proponemos:

Para analizar la respuesta a la situación, se trabajará sólo con la inicial del nombre de la persona (por ejemplo, **M** para indicar Martín).

- Si decimos que el trabajo lo obtuvo la "terna" **MNO**, significa que: **M** ocupará el cargo del turno mañana, **N** ocupará el de la tarde y **O** el de la noche.

Por lo dicho **no es lo mismo MNO que OMN**.

Dibujaremos una casilla para cada turno:



La primer casilla correspondiente a la persona que ocupará el puesto en el turno mañana, ¿por quién puede estar ocupada?

Como puede estar ocupada por cualquiera de los cinco postulantes, ¿cuántas posibilidades hay?

Una vez completa la primer casilla, o sea elegida la persona que trabajará en el turno mañana, nos quedan sólo cuatro para ocupar la segunda casilla. Entonces, ¿cuántas posibilidades hay, en total, para ocupar los dos primeros turnos (o casillas)?

Finalmente, una vez elegidas las personas a ocupar las dos primeras casillas o turnos, ¿cuántas posibilidades quedan para ocupar el turno noche?
.....

Para la tercera casilla quedan para elegir 3 personas posibles.

¿Puede escribir el cálculo que resuelve esta situación?
Escríballo:
.....

Complete con el número de posibilidades para ocupar cada turno y encuentre el número total de posibilidades:

TM	TT	TN	Total
5

Al resolver el cálculo $5 \cdot 4 \cdot 3 = \dots\dots\dots$, se obtiene la respuesta de la situación.

Repuesta: hay 60 formas diferentes de distribuir los puestos vacantes.

NOTAS

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ACTIVIDADES



1. Con los dígitos 5, 6, 7 y 9:

a) Digan cuántos números de 2 cifras distintas se pueden formar.
.....

b) Digan cuántos números de 3 cifras distintas se pueden formar.
.....

c) Digan cuántos números de 4 cifras distintas se pueden formar.
.....

2. Un testigo de un robo de un banco dijo que el número de la chapa del automóvil de los ladrones comenzaba con

ARZ, pero no recordó los últimos 3 dígitos aunque estaba totalmente seguro que éstos **eran diferentes**. ¿Cuántos números de chapas de autos se tendrían que investigar?

.....

Situación 4

Ahora cambiaremos las condiciones pedidas para el problema del robo del banco.

Tenga en cuenta:
 ¿se pueden repetir los dígitos?

a) Un testigo de un robo a un banco dijo que el número de la chapa del automóvil de los ladrones comenzaba con ARZ, pero no recordó los últimos 3 dígitos, que pueden repetirse ¿Cuántos números de chapas de autos se tendrían que investigar?

.....

NOTAS

Lo que cambia en esta nueva situación es que los dígitos pueden repetirse. ¿Cuál es la cantidad de chapas a investigar, si los dígitos pueden repetirse?

Resuélvala a continuación:

.....

Posiblemente pensó:

- Sabemos que los dígitos posibles son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Ya que los dígitos pueden repetirse, algunos de esos números pueden ser los siguientes: 000, 001, 123, 132, 133, ..., 997, 998, 999.

Si dibujamos una casilla por lugar que ocupa cada cifra de la chapa, tenemos:



Son diez elementos en total, para ubicar en las tres casillas. La primera casilla puede estar ocupada por cualquiera de los diez dígitos. Al poder repetirse los dígitos, ¿para la segunda casilla cuántos números son posibles de ubicar?

En la segunda casilla se pueden colocar cualquiera de los dígitos del 0 al 9. ¿Y cuántos posibles dígitos pueden ocupar la tercer casilla?

Lo mismo que para las casillas anteriores ocurre para la tercer casilla.

Observe:

Lugar	1°	2°	3°	Total
Posibilidades	10	10	10	1000

Luego, $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$.

Respuesta: hay 1.000 números de chapas de autos que se tendrían que investigar.

En el caso de la **situación 1** (de las tres letras de la patente), se consideran 3 "casillas" que serán ocupadas con tres elementos y en el caso de la **situación 2**, tenemos 5 "casillas" que serán ocupadas con cinco elementos (vocales), es decir que el número de elementos es igual al número de casillas. Estas dos situaciones corresponden a casos que en matemática se llaman **permutaciones**.

Permutación

Se produce una permutación si un conjunto de elementos cambia el orden entre todos ellos.

El número de elementos coincide con el número de "casillas" a considerar y **nos interesa en qué orden se ubican**.

Podemos anotar su fórmula como sigue:

$P_m = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ (se lee: permutaciones de m elementos es igual al producto de m , por m menos uno, y así se continúa disminuyendo en una unidad a los factores hasta llegar a multiplicar por dos y por uno).

PENSAR



Para la **situación 1**: permutaciones de 3 elementos y se simboliza $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Para la **situación 2**: permutaciones de 5 elementos y se simboliza $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Observe que para calcular el número de permutaciones se multiplican los factores correspondientes al número de elementos

NOTAS

NOTAS

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

considerados por otros factores que disminuyen en una unidad hasta llegar al factor uno. En la **situación 1** tenemos el producto: $3 \cdot 2 \cdot 1$ y en la situación 2: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

En la **situación 3**, la de los 5 suboficiales, vemos que la cantidad de elementos (personas) es mayor que la cantidad de casillas o puestos a ocupar. Esta situación corresponde a lo que en matemática se llama variaciones. En este caso, variaciones de 5 elementos tomados de a 3 (son tres los suboficiales a elegir) y se simboliza $V(m,n)$, en este caso $V(5,3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Variaciones

Si tenemos un conjunto de "m" elementos y **nos interesa el orden** en que van a ubicarse, pero el número de elementos es **mayor** que el número de casillas (lugares) a ocupar "-n"-, representa un caso de variación. Se simboliza $V(m, n)$ y se lee: variaciones de m elementos tomados de a n. (note que $m > n$).

Los elementos no se repiten.

En la **situación 4** importa el **orden** en que están los dígitos. Pero al poder repetirse los elementos es un caso diferente al de variaciones y de permutaciones. Igualmente, usamos el mismo razonamiento de casillas para los tres casos presentados.



ACTIVIDADES

1. Resuelvan cada una de las siguientes situaciones indicando si se trata de una variación o una permutación:
 - a) Una empresa tiene que tomar cuatro empleados, cada uno de los cuales recibirá un monto distinto de salario. Si se presentan para cubrir dichos puestos 12 personas, ¿de cuántas maneras distintas se pueden seleccionar dichos empleados?
 - b) Juan tiene una tarjeta de débito para realizar extracciones del cajero automático. Tiene que ingresar un código formado por 4 números, pero lo olvidó y lo que recuerda es que en el mismo aparecen todos dígitos distintos y que los mismos son 2, 7, 8 y 6, pero no recuerda en qué orden estaban. ¿Cuántos códigos distintos son posibles considerar?

Lea las siguientes situaciones:

Situación 5

De cinco personas, se deben seleccionar tres para realizar un curso. ¿De cuántas formas distintas se pueden seleccionar?

Situación 6

Mario va a una librería y selecciona 6 libros del mismo precio que le interesan. Como dispone de dinero solamente para comprar

NOTAS

Seguramente habrá observado que, en ambos casos, el orden de los elementos **no interesa**. Situaciones con estas características son ejemplos de **combinaciones**. En la primer situación se tiene una combinación de 5 elementos (personas) tomadas de a 3 (se seleccionan tres para hacer el curso) y se simboliza C (5,3).

En el caso de la segunda situación se tiene una combinación de 6 elementos (libros) tomados de a 4 (son los cuatro que hay que seleccionar para la compra) y se simboliza C (6, 4).

Combinaciones

Si la cantidad de elementos de un conjunto es mayor que la cantidad de lugares que se van a ocupar y **no nos interesa el orden** en que van a ubicarse, estamos en presencia de una combinación.

Además, los elementos no se repiten.

Para poder responder a las preguntas formuladas en las situaciones anteriores, y sabiendo que son casos de combinaciones, le damos la siguiente fórmula para obtener el número de posibilidades de una forma más ágil y práctica:

$$\text{Combinaciones } (m,n) = \frac{\text{Variaciones } (m, n)}{\text{Permutaciones } (n)}$$

m: número total de elementos

n: número de lugares

Los pasos para resolver estas situaciones son:

1º) Se calculan la variaciones de los **m** elementos tomados de a **n**.

2º) Se calculan las permutaciones de los lugares que se ocuparán: **n** lugares.

3º) Se realiza el cociente como indica la fórmula de combinaciones.

• Para la **situación 5**, de 5 personas debemos elegir 3. Hacemos $m = 5, n = 3$.

Complete y resuelva:

$$\text{Combinaciones } (5,3) = \frac{\text{Variaciones } (5,3)}{\text{Permutaciones } (3)} = \frac{\quad}{\quad} = \dots\dots\dots$$

Respuesta: las personas se podrán seleccionar de 10 formas diferentes.

Situación 1

Si soltamos un objeto en el aire sabemos de antemano que caerá.

Situación 2

Si lanzamos una moneda por el aire sabemos que al llegar al suelo saldrá cara o seca, pero no podemos anticipar con seguridad cuál será el resultado.

- En la **situación 1**, el experimento es **determinista**, a diferencia de la **situación 2** en la que el experimento es **aleatorio**.



PENSAR

Un experimento cuyo resultado no se puede anticipar antes de ser realizado se llama experimento aleatorio.

Un experimento cuyo resultado es previamente conocido se llama experimento determinista.

Situación 3

Si arrojamos un dado de seis caras, no podemos anticipar cómo caerá o bien qué cara del dado quedará arriba, pero sabemos que los resultados posibles son cara 1, cara 2, cara 3, cara 4, cara 5, cara 6. Al conjunto formado por todos los resultados posibles de obtener, al tirar un dado, se lo llama **espacio muestral** de dicha experiencia.

Se llama *espacio muestral* al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Situación 4

Veamos algunos ejemplos. Para ello complete la siguiente tabla:

Experimento aleatorio	Espacio muestral (resultados posibles)
Arrojar una moneda	{cara,}
Sexo de un recién nacido	{femenino, masculino}
Resultado de un partido de fútbol	{ganar, perder,}

Suceso	Casos favorables	¿Cuántos casos son favorables?
A: Obtener un número menor que 7	1, 2, 3, 4, 5 o 6	
B: Obtener el 3		
C: Obtener un número impar		
D: Obtener el 10		

La probabilidad de que ocurra el suceso A, se anota en símbolos: $P(A)$.



ACTIVIDADES

1. Responda:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el suceso A?
- b) ¿Y la del suceso D?

Posiblemente habrá contestado que la probabilidad de que ocurra A es 100%, ya que se trata de un suceso seguro: $P(A)=100\%$.

También podemos decir que tenemos 6 resultados o casos favorables, sobre un total de 6 resultados (o casos) posibles:

$$P(A) = \frac{6}{6} = 1$$

La probabilidad de un suceso se puede expresar numéricamente a través de un número racional que es cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, expresado en forma fraccionaria o decimal, o bien en forma de un porcentaje que se obtiene al multiplicar por 100 el número racional expresado en forma decimal obtenido en el cociente indicado.

La probabilidad de un suceso seguro es 1 (o 100%). $P(\text{suceso seguro}) = 1 = 100\%$

- Y la probabilidad de que ocurra D, es 0%, por tratarse de un suceso imposible: $P(D) = 0\%$.

Decimos que tenemos 0 resultados favorables, sobre un total de 6 resultados posibles:

$$P(D) = \frac{0}{6} = 0$$

La probabilidad de un suceso imposible es 0 (o 0%). $P(\text{suceso imposible}) = 0 = 0\%$

expresado en forma fraccionaria o en forma decimal o en términos de porcentaje (multiplicando por 100 el número racional expresado en forma decimal obtenido).

Por ejemplo: para indicar que la probabilidad de que al tirar un dado legal salga la cara número 3 es igual a $\frac{1}{6}$ (un caso

favorable en seis posibles) o bien dicha probabilidad es igual a $0,1\overline{6}$. Si a este número lo multiplica por 100 obtiene la probabilidad expresada en porcentaje: $16,6\% \approx 17\%$ (aproximadamente igual al 17 %). Este resultado obtenido indica que hay aproximadamente un 17% de probabilidad de arrojar un dado legal y que salga la cara con el número tres.

NOTAS

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

PENSAR



La probabilidad de que ocurra un suceso A está dada por el cociente entre el número de casos o resultados favorables y el de resultados o casos posibles:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$



ACTIVIDADES

1. Se lanza una moneda al aire. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara?

.....

2. Ante el experimento: extraer una carta de la baraja española (considerar las cartas de truco).

a) ¿Cuál es la cantidad de elementos del espacio muestral de dicho experimento?

b) Para el suceso A : obtener rey, ¿cuál es la cantidad de casos favorables del suceso A ?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una carta del mazo, ésta sea rey?

3. Ante el experimento: lanzar dos monedas, una de \$0,25 y la otra de \$0,50; y observar cómo caen.

a) ¿Cuál es el espacio muestral de dicho experimento?

b) Hallar los casos favorables de los siguientes sucesos:

Suceso	Casos favorables
A: obtener dos caras	
B: obtener dos secas	
C: obtener una cara y una seca.	

- c) ¿Cuál es la probabilidad del suceso A?
- d) ¿Cuál es la probabilidad del suceso C?

NOTAS

Situación 4 (probabilidad y combinatoria)

Analícemos el siguiente experimento: extraer dos cartas de la baraja española. (Considerar las cartas de truco) y obtener dos oros el suceso C.

Para encontrar el número de resultados o casos posibles:

Hay que pensar en todas las formas posibles de seleccionar dos cartas entre las cuarenta del mazo. Estamos en presencia de una combinación de 40 elementos tomados de a 2, ya que **no importa el orden en las extracciones**. Aplicamos la fórmula correspondiente:

$$\text{Combinaciones } (40,2) = \frac{\text{Variaciones } (40, 2)}{\text{Permutaciones } (2)} = \frac{40 \cdot 39}{2 \cdot 1} = 780 \text{ casos posibles}$$

Para encontrar el número de resultados o casos favorables a C:

Hay que pensar en cuántas son las formas posibles de seleccionar dos cartas entre las diez que son de oro. Nuevamente no importa el orden, por lo que representa una combinación de 10 elementos tomados de a 2:

$$\text{Combinaciones } (10,2) = \frac{\text{Variaciones } (10, 2)}{\text{Permutaciones } (2)} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45 \text{ casos favorables}$$

Si nos preguntamos cuál es la probabilidad de que al extraer al azar dos cartas ambas sean de oro, hacemos:

$$P(C) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{45}{780} = 0,06 = 6\%$$

Es decir, hay un 6% de probabilidad de que al extraer al azar dos cartas de un mazo de la baraja española, ambas sean de oro.



ACTIVIDADES

1. En el experimento anterior, si analizan el suceso R: obtener el as de espada y el rey de espadas.

- a) ¿Cuál es la cantidad de casos posibles?
- b) ¿Cuál es la cantidad de casos favorables al suceso R?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de R?

Efectivamente, habrán pensado que existe un solo caso favorable entre los 780 posibles.

ESTADÍSTICA

NOTAS

La estadística es una rama de la matemática que se ocupa de recopilar datos (censos, encuestas, etc.), de organizarlos para una mejor comprensión y de analizarlos con un determinado objetivo.

Todas las ciencias la aplican (economía, ciencias sociales, medicina, etc.) ya que facilita el estudio de hechos morales, sociales o físicos del mundo y de la sociedad. De allí la importancia de su estudio.

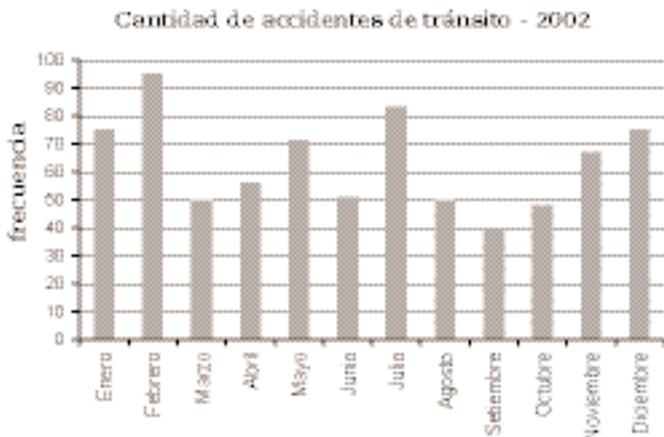
El conocimiento de algunas nociones estadísticas le permitirá organizar y comprender los datos que usted utiliza a diario en su actividad laboral y doméstica.

INTERPRETACIÓN DE TABLAS. VARIABLES. FRECUENCIA ABSOLUTA

Situación 1

Observemos la siguiente tabla (con su gráfico correspondiente) que forma parte de información brindada por la provincia de La Pampa:

ESTADÍSTICA DE ACCIDENTES DE TRÁNSITO
 Departamento Operaciones Policiales D-3
 Jefatura de Policía
 ENERO - DICIEMBRE DEL AÑO 2002



Meses	Frecuencia (N° de accidentes)
Enero	75
Febrero	95
Marzo	50
Abril	56
Mayo	71
Junio	51
Julio	83
Agosto	50
Setiembre	40
Octubre	48
Noviembre	67
Diciembre	75
Totales	761

NOTAS

En ella observamos que los datos (número de accidentes) están organizados teniendo en cuenta la variable **meses**.

- Si tomamos al número 71, resaltado en la tabla, podemos interpretar: "en mayo ocurrieron 71 accidentes de tránsito".
- En la columna **frecuencia** está indicado el número de accidentes ocurridos en cada mes.
- Se dice que en la tabla se muestra una distribución de frecuencias de accidentes de tránsito organizada en meses.
- La **mayor frecuencia** está dada en el mes de **febrero (95 accidentes)**. Quiere decir que febrero es el mes en el que se registraron mayor número de accidentes. También se observa en el gráfico que la barra correspondiente a este mes es la más alta.
- La suma de todas las frecuencias da el total de accidentes en el año (761 accidentes).
- Se pueden hacer lecturas como esta: 48 de un total de 761 accidentes ocurrieron en octubre.

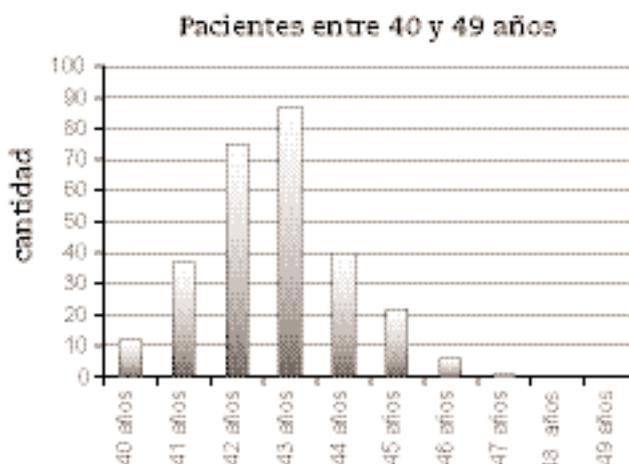
En las interpretaciones hechas de la situación 1 y en la tabla correspondiente aparece el término **frecuencia**. La definimos como:

Frecuencia absoluta, o simplemente frecuencia, es el número de veces que aparece cada valor de una variable, es decir, el número de veces que aparece en el conjunto de datos un mismo valor de la variable.

Situación 2

La siguiente es una distribución de edades de pacientes (entre 40 y hasta 49 años) internados en un hospital:

EDAD	Nº de pacientes
40	12
41	37
42	75
43	87
44	40
45	22
46	6
47	1
48	0
49	0
total	280



2. Identificar los tipos de variables en los siguientes ejemplos:

- a) color de camisa
- b) número de integrantes del grupo familiar
- c) cantidad de llamadas diarias
- d) deporte preferido
- e) programa de televisión que se prefiere

NOTAS

Frecuencia relativa y porcentual

Situación 3

Si observamos detenidamente la situación 1 y nos preguntamos:

- ¿Qué parte del total de accidentes del año 2002 corresponde al mes de marzo? O bien, ¿cuál es el porcentaje de accidentes ocurridos en mayo?

Seguramente no podríamos obtener esa información de la tabla tal cual está hecha. Es necesario la realización de algunos cálculos para encontrar lo que se llama **frecuencia relativa** y posteriormente la **frecuencia porcentual**, a partir de las cuales podremos responder el tipo de preguntas como las formuladas anteriormente.

Para completar la columna de frecuencia relativa debe preguntarse para cada mes, ¿qué parte del total de accidentes (761) corresponde al mes de enero?, ¿qué parte al mes de febrero?, y así mes a mes. Para responder estas preguntas posiblemente pensó que 75 de los 761 accidentes ocurrieron en el mes de enero y el cociente $75 : 761$ o $\frac{75}{761}$ es la frecuencia relativa

En general suele expresarse en forma decimal, en este caso $\frac{75}{761} = 0,10$.

Si a la frecuencia relativa la multiplica por 100 obtendrá la frecuencia porcentual, que indica cuántos de cada 100 accidentes ocurrieron en el mes de enero.

Redondeado a dos decimales.

Meses	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia porcentual
Enero	75	$\frac{75}{761} = 0,10$	10%
Febrero	95	$\frac{95}{761} = 0,12$	12%
Marzo	50	$\frac{50}{761} = 0,07$	7%
Abril	56	$\frac{56}{761} = 0,07$	7%
Mayo	71	$\frac{71}{761} = 0,09$	9%
Junio	51	$\frac{51}{761} = 0,07$	7%
Julio	83	$\frac{83}{761} = 0,11$	11%
Agosto	50	$\frac{50}{761} = 0,07$	7%
Setiembre	40	$\frac{40}{761} = 0,05$	5%
Octubre	48	$\frac{48}{761} = 0,06$	6%
Noviembre	67	$\frac{67}{761} = 0,09$	9%
Diciembre	75	$\frac{75}{761} = 0,10$	10%
Totales	761	$\frac{761}{761} = 1$	100%

Si multiplicamos:
 $0,10 \cdot 100\% = 10\%$

?

porcentaje

El símbolo % se lee "por ciento", El 10% que aparece en la primer fila de la tabla se interpreta como: "10 accidentes de tránsito de cada 100 ocurrieron en enero". Se puede escribir:

$$10\% = \frac{10}{100} = 0,10$$

NOTAS

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Recuerde que la frecuencia relativa indica qué parte o fracción del total representa cada valor de la variable. Así, la frecuencia relativa de marzo es $\frac{50}{761}$, o bien si dividimos 50 y 761 se obtiene la expresión en forma decimal: 0,07. Además, ese valor nos indica las probabilidades correspondientes a cada valor de la variable.

La frecuencia relativa es la parte del total que representa cada valor de la variable.

Es el cociente de la frecuencia absoluta sobre el total de datos analizados.

ACTIVIDADES



1. Verifique con la calculadora cada uno de los resultados obtenidos en la frecuencia relativa.

a) ¿Cuál es la probabilidad de elegir al azar un accidente que haya ocurrido en marzo?

.....

b) ¿Cuál es la probabilidad de elegir al azar un accidente que haya ocurrido en mayo?

.....

Como antes se indicó, si se multiplica la **frecuencia relativa** por 100 se obtiene la **frecuencia porcentual**. En el caso de mayo es: $0,09 \times 100\% = 9\%$, nos indica el porcentaje de accidentes ocurridos en mayo, respecto del total anual.

Se llama **frecuencia porcentual** al porcentaje que representa cada valor de la variable.

Se obtiene multiplicando la frecuencia relativa por 100.

Así, interpretamos que el 11% de los accidentes del año 2002, ocurrieron en julio.



ACTIVIDADES

1. Completen la tabla siguiente con las frecuencias que faltan:

(Nota: en la frecuencia relativa deben trabajar en forma aproximada "redondeando" a dos decimales)

se divide por el número total de pacientes se multiplica por 100

EDAD	Nº de pacientes	Frecuencia relativa	Frecuencia porcentual
40	12	$\frac{12}{280} = 0,04$	4%
41	37		
42	75		
43	87		
44	40		
45	22		
46	6		
47	1		
48	0		0%
49	0		0%
Total	280		100%

Se puede decir que, en promedio, 25 personas por día realizaron una denuncia en esa comisaría.



PENSAR

Dado un conjunto de datos numéricos, su **promedio** es el cociente entre la suma de todos los datos y el número total de datos sumados

Se simboliza : \bar{x} .



ACTIVIDADES

1. En una semana un móvil ha gastado 245 litros de combustible.

Dom	Lun	Mar	Mié	Jue	Vie	Sáb
25	31	45	42	37	35	30

A partir de estos datos, responda:

- a) ¿Cuál es el promedio de consumo de combustible diario?
- b) ¿Para qué le puede servir el cálculo del promedio al responsable del móvil?

NOTAS

Moda

Otro valor que podemos elegir como representante de una serie de datos es la **moda**.

La **moda** de un conjunto de datos es el valor que aparece más veces, es decir el valor de mayor frecuencia.

Nota:

si todos los valores tienen igual frecuencia, entonces la **moda no existe**.

Si más de un valor tiene la mayor frecuencia, entonces habrá **más de una moda**.

- En la **situación 2**, en la que se muestra la distribución de las edades de los pacientes, la **moda** es **43 años**, porque el valor de la variable edad igual a 43 años presenta la mayor frecuencia (87).

A partir de esto, se puede decir que lo más común es que los pacientes internados en ese hospital tengan 43 años.



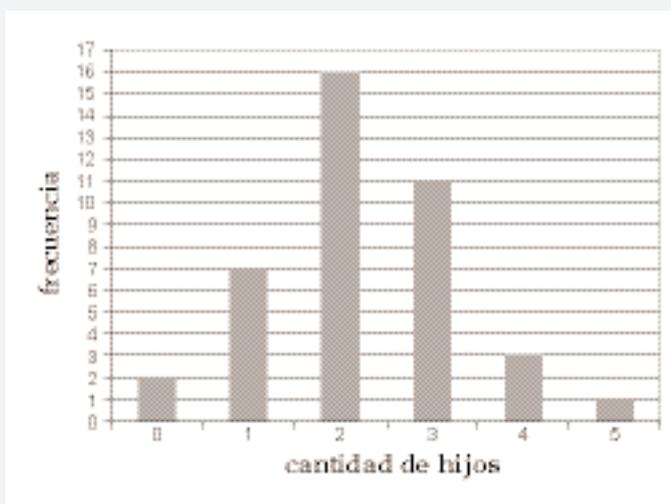
ACTIVIDADES

1. Responda: ¿Cuál es la moda en la situación 4?

.....

2. Se realiza una encuesta a los empleados de un establecimiento para saber el número de hijos que tienen. Se obtiene la siguiente tabla y gráfico:

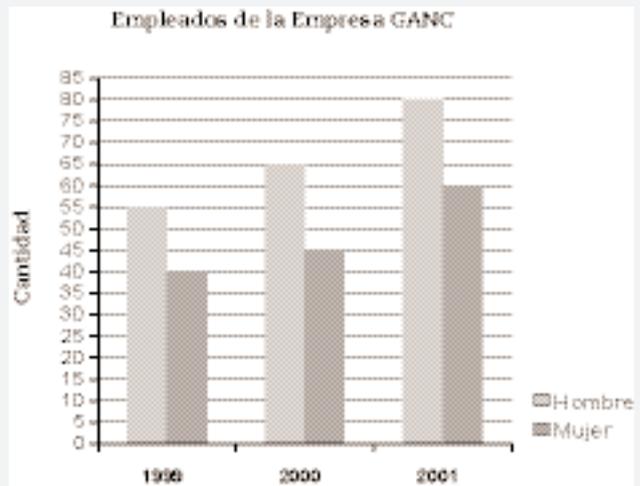
Cantidad de hijos	Frecuencia
0	2
1	
2	16
3	11
4	
5	1
Total de encuestados	



- a) Completar la tabla teniendo en cuenta la representación gráfica.
- b) ¿Cómo interpreta al número 7 que aparece en la columna de "frecuencia"?
- c) ¿Cuál es la moda? ¿Por qué?
- d) ¿Cómo identifica la moda en el gráfico?
- e) ¿Cuál es la probabilidad de elegir un empleado al azar que tenga 3 hijos?
- f) ¿Cuál es la probabilidad de elegir un empleado al azar que tenga 3 o más hijos?

3. El gráfico que se muestra a continuación representa la cantidad de empleados de la Empresa GANC en los años 1999, 2000 y 2001, según su sexo.

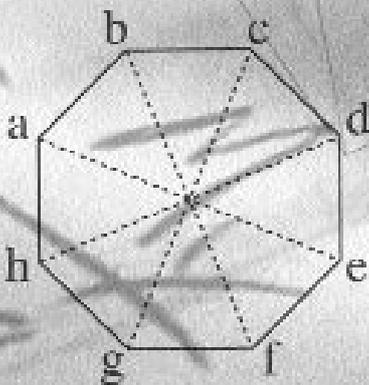
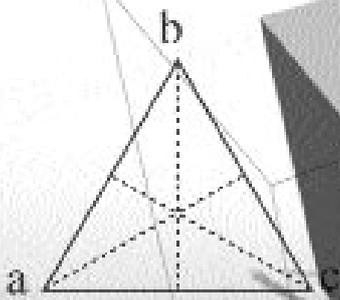
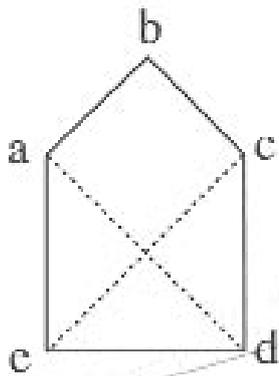
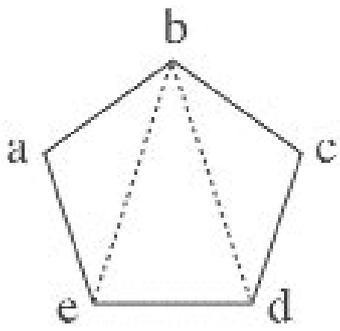
Este es un gráfico de "barras comparativas", ya que pueden compararse las partes (sexo) para cada año.



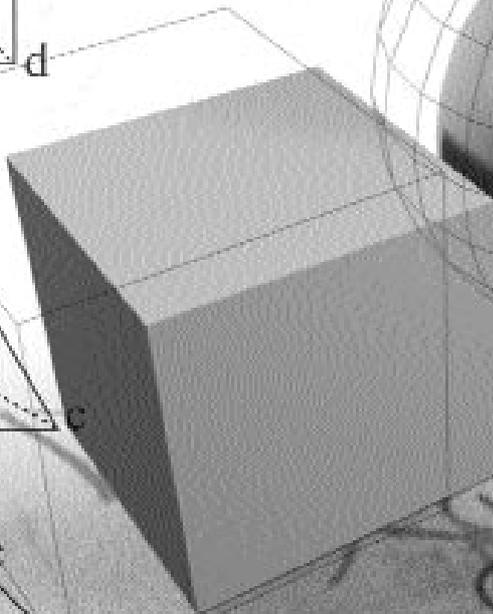
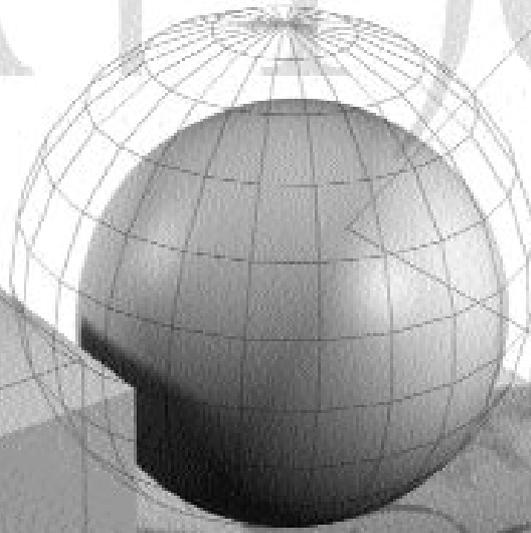
a) Teniendo en cuenta la información mostrada, le pedimos que complete la siguiente tabla:

AÑO	Sexo		Total
	Hombre	Mujer	
1999			
2000			
2001			

b) Escribir cuatro interpretaciones que sean de utilidad (puede hacerlas a partir del gráfico o de la tabla).



$$(x^2 + 1) dx =$$



Eje 3: Nociones geométricas

¿Qué esperamos que usted logre cuando termine este eje?

Al final de este eje esperamos que usted pueda:

- Comprender y saber resolver problemas, seleccionando el tipo de razonamiento, interpretando los resultados y justificando los procedimientos empleados.
- Identificar, describir e interpretar los conocimientos geométricos referidos a figuras planas y tridimensionales y a sus propiedades.
- Interpretar y usar nociones relacionadas con las medidas y los procedimientos de medición de cantidades de longitud, amplitud, capacidad, peso, superficie y volumen.

¿Qué vamos a estudiar?

Algunos de los contenidos más importantes que vamos a estudiar son:

Sistema de referencias cartesianas en el plano. Coordenadas. Ordenada al origen y pendiente. Elementos de simetría. Ángulos y polígonos. Propiedades. Figuras semejantes. Cuerpos poliedros y redondos. Clasificaciones. Medición. Capacidad y peso de cuerpos con formas geométricas. Unidades para medir cantidades de capacidad y peso.

NOCIONES GEOMÉTRICAS

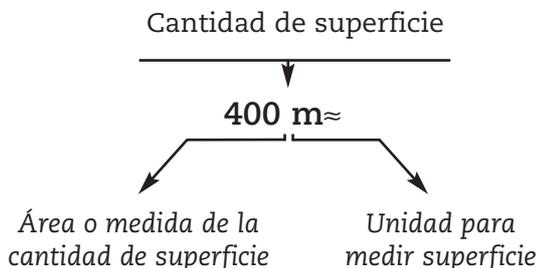
CANTIDADES DE SUPERFICIE

Uno de los principales conceptos que se asocian con la superficie es el de área. ¿Hay alguna diferencia entre área y superficie? Ciertamente que sí. No es lo mismo la cantidad de superficie de una figura que el área de dicha figura. Pero existe una relación entre ellas.

Al leer el diario es posible encontrar avisos clasificados de venta de casas o terrenos como los siguientes: "cerca plaza departamental, casa 3 dormitorios, living comedor, cocina comedor, terreno 200 m², \$38.500"; "San Martín, lote escriturado, 580 m², \$9.500 total". En estos enunciados aparecen expresiones como "200 m²" y "580 m²" que indican las cantidades de superficie de terrenos que están a la venta. Aparecen en ellas los números "200" y "580" que son las medidas de la cantidad de superficie de cada uno de ellos o bien el área de cada uno de dichos terrenos. Junto a dichos números aparece "m²" (metro cuadrado) que es la unidad para medir superficie considerada.

El área de una figura es un número que indica la medida de la cantidad de superficie de dicha figura.

La medida de una cantidad de superficie, o su área, depende de la unidad que se utilice para medir la superficie considerada. Así por ejemplo, si a usted le informan que un terreno mide 400 m² tendrá que interpretar que 400 es la medida o el área del terreno y m² es la unidad que se ha empleado para medir la superficie del terreno.



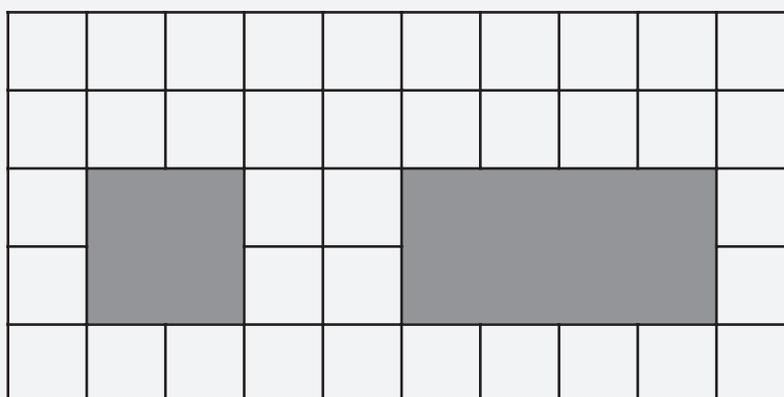
ACTIVIDADES

¿Qué es medir una cantidad de superficie?

Para responder a este interrogante lea detenidamente las siguientes situaciones:

Situación 1

1. Considere el siguiente cuadrículado y en él dos figuras:



a) ¿Qué forma tienen dichas figuras?

En realidad, dichas figuras representan dos polígonos, ambos de cuatro lados. Es decir que son cuadriláteros: uno es un cuadrado (cuadrilátero con lados y ángulos congruentes) y el otro es un rectángulo (cuadrilátero con cuatro ángulos congruentes).

2. Mida la cantidad de superficie de los cuadriláteros, considerando como unidad para medir el siguiente cuadrado, al que llamaremos "cuadrado unidad".



Para medir las cantidades de superficie del cuadrado representado imagine muchos de esos "cuadrados unidad" y responda:

a) ¿Cuántos "cuadrados unidad" son necesarios para cubrir la superficie del cuadrado representado?

.....

El número que obtuvo es la medida de la cantidad de superficie del cuadrado representado o bien su área.

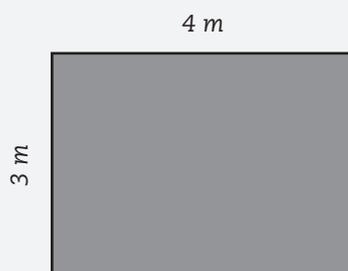
b) ¿Cuánto mide la superficie del rectángulo usando el "cuadrado unidad" como unidad para medir?

.....

El área de cada uno de los cuadriláteros es 4 y 8, respectivamente, e indica el número de unidades (cuadrados unidad) que son necesarias para cubrir la superficie de ambos.

Situación 2

1. Juan tiene que alfombrar una habitación de forma rectangular. Sus medidas son:



Juan recuerda una fórmula con la que podía calcular la cantidad de superficie de figuras como la de la situación. La fórmula es:

$$|b| \times |h| \times u \approx$$

Donde $|b|$ es la medida de la cantidad de longitud de la base, $|h|$ es la medida de la cantidad de longitud de la altura y $u \approx$ es la unidad para medir la superficie considerada.

a) Finalmente, Juan reemplaza en la fórmula dichas medidas y obtiene la cantidad de superficie. ¿Cuál es la cantidad de superficie encontrada por Juan?

.....

El área de la habitación o lo que es lo mismo, la medida de la cantidad de superficie, indica el número de metros cuadrados (m^2) de alfombra que necesita comprar.

b) ¿Qué significado tiene que la cantidad de superficie de la habitación sea de $12 m^2$?

.....

2. Como habrá observado, es posible calcular la superficie de las figuras haciendo uso de una unidad no convencional elegida previamente, como ocurre en la situación 1, o con una unidad convencional y a través del empleo de una fórmula, como sucede en la situación 2. Sin embargo, es oportuno preguntar:

a) ¿Qué pasaría con las medidas de las cantidades de superficie de los cuadriláteros de la situación 1, si otras personas los midieran y no utilizaran la misma unidad con la que se trabajó?

.....

b) ¿Cómo se puede obtener el área de una figura sin tener que trabajar necesariamente sobre un cuadrículado?

.....

c) ¿Cómo haría usted para calcular el área del cuadrado de la situación 1 sin tener que contar uno por uno los cuadraditos que usó para cubrir al cuadrado?

.....

Posiblemente pensó en aplicar una fórmula como hizo Juan en la situación 2, que por tratarse de un cuadrado es: $|l| \cdot |l| \cdot u \approx (|l| \text{ es la medida de la cantidad de longitud del lado del cuadrado})$.

Para calcular cantidades de superficie de figuras con formas conocidas (formas cuadradas, rectangulares, triangulares, circulares, pentagonales) es mucho más práctico utilizar fórmulas que existen para tal efecto y una unidad convencional.

A propósito de unidad convencional...

En nuestro país, la **unidad para medir** cantidades de superficie es el **metro cuadrado**. Decimos que es convencional porque ha sido adoptada o acordada para ser usada en toda situación en la que se tenga que medir una cantidad de superficie.

El metro cuadrado se puede materializar a través de un cuadrado de un metro de lado.

3. Construya un metro cuadrado en papel de diario o bien imagine dicho cuadrado de un metro de lado y responda:

a) ¿Cuántos de dichos cuadrados, es decir, cuántos metros cuadrados (m²) necesita para cubrir la superficie de la mesa de su casa?

.....

b) ¿Con cuántos cubriría el piso de la habitación donde habitualmente estudia o trabaja?

.....

Al responder a las preguntas planteadas está dando el área aproximada de la superficie de la mesa y del piso de la habitación.

Usted habrá escuchado que para medir cantidades de superficie se suelen utilizar otras unidades, como el centímetro cuadrado, la hectárea.

¿Cuándo se utilizan otras unidades para medir cantidades de superficie? Piense que no siempre resulta práctico utilizar el metro cuadrado como unidad para medir. Imagine que le piden medir la

cantidad de superficie de la silla para cambiar el tapizado de la misma o la extensión superficial de la hoja en la que está trabajando. Para medir estas cantidades de superficie, que tienen menos extensión que la de un metro cuadrado, se utilizan otras unidades conocidas como submúltiplos y para aquellas que tengan mayor extensión que la de un metro cuadrado se usan los múltiplos.

Los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado son:

Múltiplos	Kilómetro cuadrado Hectómetro cuadrado Decámetro cuadrado	km≈ hm≈ dam≈	1000000 m≈ 10000 m≈ 100 m≈
Unidad	Metro cuadrado	m≈	1 m≈
Submúltiplos	Decímetro cuadrado Centímetro cuadrado Milímetro cuadrado	dm≈ cm≈ mm≈	0,01 m≈ 0,0001 m≈ 0,000001 m≈

Si analiza el cuadro, usted podrá comprender que un metro cuadrado equivale a 100 decímetros cuadrados, ya que cada decímetro cuadrado es la centésima parte del metro cuadrado. Por lo que es posible expresar: $1\text{ m}\approx = 100\text{ dm}\approx$ (se lee: un metro cuadrado equivale a cien decímetros cuadrados).

También puede comprender otras equivalencias muy empleadas:

¿Qué parte del metro cuadrado es el centímetro cuadrado? Para cubrir un metro cuadrado con cuadrados de un centímetro de lado (cm≈) se necesitan 10.000 de ellos. Por lo que puede expresarse que $1\text{ m}\approx = 10.000\text{ cm}\approx$. Esto significa que el cm≈ es la diezmilésima parte del metro cuadrado.

Ahora imagine una manzana de barrio, generalmente cada cuadra de la manzana... ¿cuánto mide?

.....

Una manzana tiene forma de un cuadrado cuyo lado mide 100 metros o, lo que es equivalente, 1 hm (hectómetro), entonces... ¿cuál es la cantidad de superficie de una manzana de barrio?

.....

Si bien la cantidad de superficie de una manzana es de 1 hm≈ (cuadrado de un hm de lado), es lo que generalmente se denomina como una **hectárea**, unidad agraria que se emplea para medir extensiones superficiales de campos o terrenos.

¿CÓMO HALLAR CANTIDADES DE SUPERFICIE EQUIVALENTES?

Piense en el valor de la cantidad de superficie del piso de una habitación si la mide con un cuadrado de un metro de lado, es decir con 1 m². Si el resultado de la medición es, por ejemplo, 20 m², ¿qué significa? Que usted tuvo que colocar consecutivamente, y sin superponer, "veinte veces" el cuadrado de 1 m de lado o el m² sobre el piso de la habitación.

Ahora piense si utilizara como unidad para medir un cuadrado de 1 dm de lado, un decímetro cuadrado. ¿Qué valor obtendría? Posiblemente usted pensó: si un metro cuadrado equivale a 100 decímetros cuadrados, entonces 20 x 100 serán 2.000 decímetros cuadrados. Lo que equivale a resolver un problemita de regla de tres simple:

$$\begin{array}{l} 1 \text{ m}^2 \text{ ————— } 100 \text{ dm}^2 \\ 20 \text{ m}^2 \text{ ————— } 20 \cdot 100 = 2.000 \text{ dm}^2 \end{array}$$

La cantidad de superficie del piso de la habitación es, por lo tanto, equivalente a 20 m², a 2.000 dm² y también, si hace el cálculo correspondiente, es equivalente a 200.000 cm².

Como puede observar, para expresar una cantidad de superficie en otra unidad para medir por ejemplo 20,35 hm², se puede emplear una regla de tres simple directa. De esta forma se obtiene una cantidad equivalente a la dada pero expresada en otra unidad, por ejemplo, en metros cuadrados. Observe cómo para expresar 20,35 hm² en metros cuadrados se puede proceder de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} 1 \text{ hm}^2 \text{ ————— } 10.000 \text{ m}^2 \\ 20,35 \text{ hm}^2 \text{ ——— } x \end{array}$$

Resolviendo esta regla de tres se obtiene el resultado buscado.

Es decir, si realiza el cálculo:

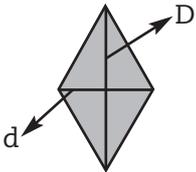
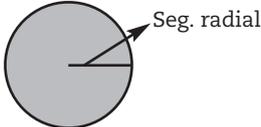
$$\frac{20,35 \cdot 10.000}{1}$$

obtendrá la equivalencia buscada y podrá expresar que: 20,35 hectómetros cuadrados equivalen a 203.500 metros cuadrados, que en lenguaje simbólico se escribe: 20,35 hm² = 203.500 m².

Algunas fórmulas más utilizadas

Posiblemente recuerde que para encontrar cantidades de superficie se emplean fórmulas, algunas de ellas culturalmente arraigadas, como la fórmula que permite calcular la cantidad de superficie de una figura con forma de rectángulo, que en el lenguaje común de la gente es: "base por altura", aunque

matemáticamente la expresión correcta sea "medida de la longitud de la base del rectángulo por la medida de la cantidad de longitud de la altura del mismo por la unidad para medir cantidad de superficie utilizada". A continuación se sintetizan en el cuadro las fórmulas para calcular cantidades de superficie de algunas de las figuras geométricas más utilizadas :

Figura	Fórmula	Observaciones
Cuadrado	$ l \cdot l \cdot u \approx$	$ l $ es la medida de la cantidad de longitud del lado.
Rectángulo	$ b \cdot h \cdot u \approx$	$ b $ es la medida de la longitud de la base del rectángulo. $ h $ es la medida de la longitud de la altura del rectángulo.
Paralelogramo	$ b \cdot h \cdot u \approx$	$ b $ es la medida de la longitud de la base del paralelogramo. $ h $ es la medida de la longitud de la altura del paralelogramo.
Triángulo	$\frac{ b \cdot h }{2} \cdot u \approx$	$ b $ es la medida de la longitud de la base del triángulo. $ h $ es la medida de la longitud de la altura del triángulo.
Rombo 	$\frac{ D \cdot d }{2} \cdot u \approx$	$ D $ es la medida de la longitud de la diagonal más larga del rombo (diagonal mayor). $ d $ es la medida de la longitud de la diagonal menos larga del rombo (diagonal menor).
Círculo 	$\pi \cdot r \approx \cdot u \approx$	r es el radio del círculo, es decir la medida de la longitud del segmento radial. π es el número "pi" que acordamos usar con el valor aproximado 3,14.

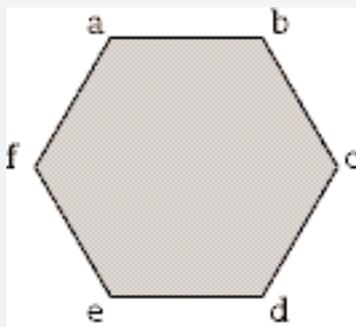
ACTIVIDADES



1. ¿Cómo calcular la cantidad de superficie de un polígono regular?

Consideren el siguiente polígono regular, que por tener seis lados recibe el nombre de hexágono regular.

Recuerde. Un polígono es regular cuando tiene todos sus lados y ángulos interiores congruentes.



Hexágono regular *abcdef*

a) Tracen las siguientes diagonales: \overline{ad} ; \overline{be} ; \overline{cf}

Recuerde. Diagonal es el segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos del polígono. Apotema es el segmento cuyos extremos son el centro del polígono y el punto medio de un lado del polígono.

b) ¿Qué ocurre con el polígono?

.....

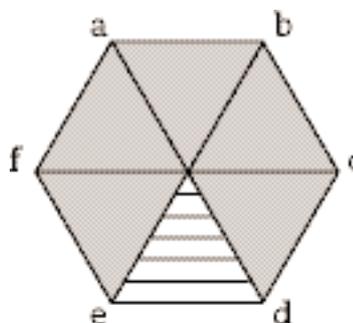
.....

c) El polígono queda fraccionado en 6 triángulos, ¿cómo son dichos triángulos entre sí?

.....

Por lo tanto el hexágono regular ha quedado fraccionado en 6 triángulos congruentes, por lo que para poder calcular la cantidad de superficie del polígono, puede calcular la cantidad de superficie de uno de los triángulos y, luego, como son seis... ¿qué habría que hacer?

Observe el hexágono regular fraccionado en 6 triángulos. En él se ha resaltado uno de los triángulos.



Para encontrar la cantidad de superficie de uno de los triángulos hay que considerar la medida de la cantidad de longitud de la base del triángulo y la medida de la cantidad de longitud de la altura del mismo.

De esta manera se tiene que la cantidad de superficie del triángulo considerado puede expresarse como:

$$\frac{|b| \cdot |h|}{2} \cdot u \approx$$

Pero como se trata de seis triángulos congruentes, la expresión para encontrar la cantidad de superficie de todo el polígono es:

$$6 \cdot \frac{|b| \cdot |h|}{2} \cdot u \approx$$

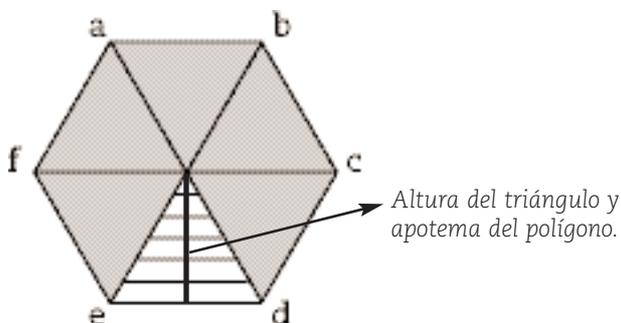
Observe:

- la base del triángulo, ¿qué elemento del polígono es?

.....

- la altura del triángulo señalado, ¿qué elemento del polígono es?

.....



Si considera las observaciones anteriores verá que se puede expresar la fórmula anterior como:

$$6 \cdot \frac{|l| \cdot |a|}{2} \cdot u \approx$$

Observe la expresión anterior: al calcular $6 \cdot |l|$ (que representa 6 veces la medida de la longitud del lado del polígono regular), ¿qué se obtiene?

.....

Posiblemente pensó en la medida de la longitud de la frontera del polígono, es decir en el perímetro de la figura que se simboliza como P.

Así se tiene que la expresión general para calcular la cantidad de superficie de un polígono regular es:

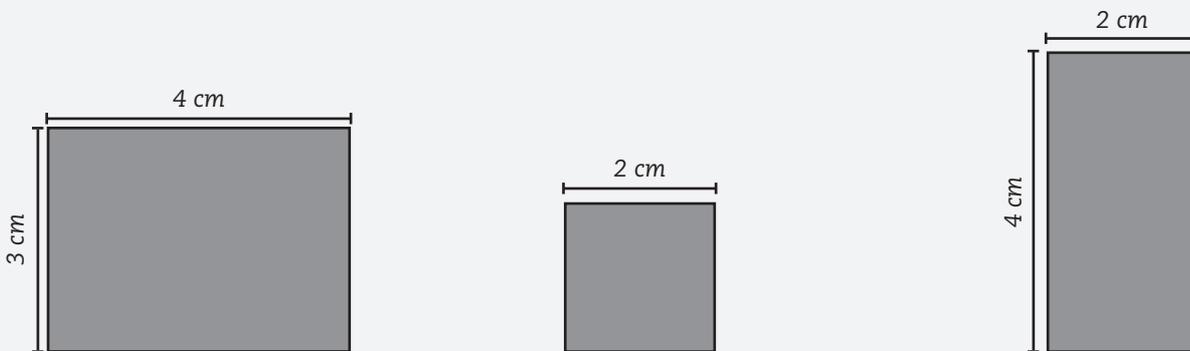
$$\frac{P \cdot |a|}{2} \cdot u \approx$$

Donde P es el perímetro del polígono y |a| es la medida de la longitud de la apotema del mismo.



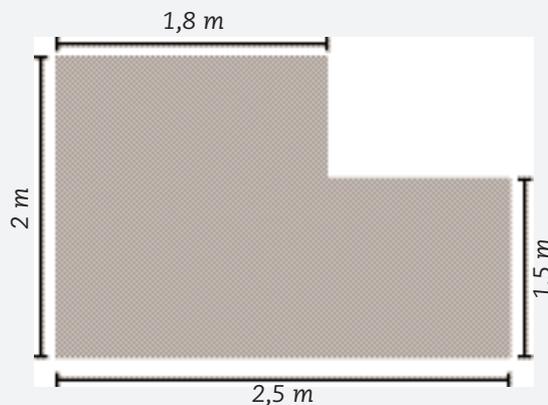
ACTIVIDADES

1. Calculen la cantidad de superficie de los siguientes rectángulos:



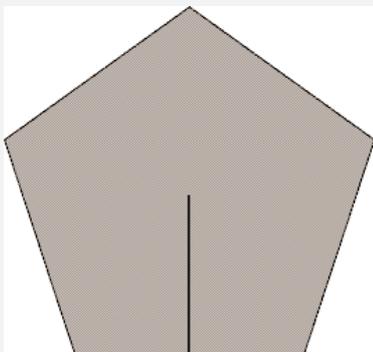
2. Un jardinero cobra \$0,50 cada metro cuadrado de césped que corta. Si es contratado en un primer momento para cortar el césped del círculo central de una cancha de fútbol cuyas dimensiones son las siguientes: 100 metros de largo y 70 metros de ancho y el segmento radial del círculo central es de 6 metros de longitud, ¿cuánto dinero cobrará al finalizar la tarea? Y si cortara el césped de toda la cancha, ¿cuánto dinero ganaría?

3. Para refaccionar el baño de una casa se desea colocar cerámicos en el piso y en la pared más larga del mismo. En dicha pared se quiere colocar cerámicos hasta una altura de 3 metros. Las dimensiones del largo de las paredes del baño son las que se muestran a continuación:



Para cubrir la superficie indicada, ¿cuántos metros cuadrados de cerámica serán necesarios comprar?

4. Un grupo de personas del club, que se dedican a practicar fútbol, se reúnen para confeccionar un distintivo que los identifique para participar de un campeonato. Luego de algunas propuestas resultó la opción consensuada por todos. La forma general del distintivo es:



Medida de la longitud del lado: 6 cm.

Medida de la longitud de la apotema: 4,14 cm.

Al diseño general le falta agregar un dibujo y el nombre del grupo. Se desea saber qué cantidad de centímetros cuadrados de plástico serán necesarios para la confección del formato general de cada uno de ellos.

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN EL PLANO

Todas las nociones que se refieren a las transformaciones geométricas en el plano serán abordadas desde un punto de vista totalmente intuitivo. La intención es mostrar la forma en que se producen y las propiedades que en ellas permanecen invariantes.

Simetría. Ubicación del eje de simetría

LEER



"La simetría nos da verdaderamente el sentido de la armonía. No es posible imaginar, por ejemplo, un bello animal que no sea simétrico, y nos parece extraño que una flor tenga características distintas en las caras opuestas. Esta sensación agradable y apacible que nos producen las figuras simétricas ha llevado a los arquitectos, pintores y a todos los artistas a basar sus obras en tal característica geométrica.

La simetría, principio absoluto del arte clásico, pasó de moda en la Edad Media, en la que se preferían formas asimétricas, para luego volver a ser elemento esencial en el Renacimiento y a dominar los siglos siguientes."

Castelnuovo, E., Geometría Intuitiva, Labor.

Observe la simetría que presentan los portones del parque General San Martín.

Observe la foto y piense en trazar una recta que la separe en dos partes que resulten ser congruentes, de tal forma que si la foto la plegamos por dicha recta imaginaria las partes quedan superpuestas y coincidan exactamente. Esto significa que a ambos lados de esa línea imaginaria, llamada eje de simetría, la construcción de los portones tiene las mismas características.



Tal como decía el texto anterior, la simetría puede observarse en multiplicidad de cosas.



ACTIVIDADES

Situación 1

1. Trace en cada una de las siguientes figuras sus ejes de simetría, para lo cual puede:

- a) Calcar dichas figuras en papel de calcar.
- b) Trazar los posibles ejes de simetría separando a la figura en dos partes congruentes.
- c) Verificar si son ejes de simetría, es decir observar si al plegar por la línea marcada las dos partes del dibujo quedan superpuestas en forma exacta.



Figura 1

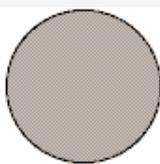


Figura 2

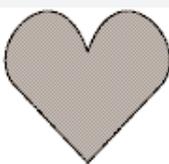


Figura 3

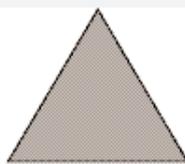


Figura 4



Figura 5



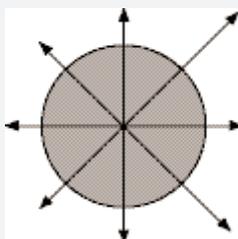
Figura 6

2. Luego de realizar la actividad responde:

- a) ¿Cuántos ejes de simetría pudo trazar en la figura 1?
- b) ¿Cuántos ejes de simetría pudo trazar en la figura 2? ¿Podría seguir trazando más ejes de simetría? ¿Cuántos?
- c) La figura 4 es un triángulo equilátero (triángulo con tres lados y ángulos congruentes), ¿cuántos ejes de simetría pudo trazar?
- d) ¿Cuántos ejes de simetría pudo trazar en la figura 5?

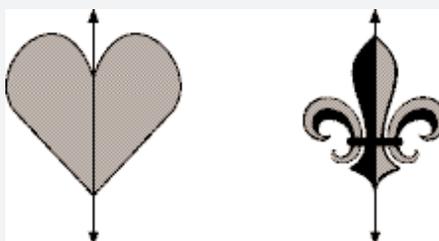
3. Hay figuras que tienen un solo eje de simetría, otras dos, algunas infinitos y otras ninguno. Por ejemplo:

a) El círculo (figura 2) posee infinitos ejes de simetría. Observe los trazados y trace, por lo menos, dos ejes más.



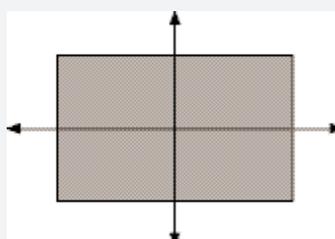
b) La figura 5 no tiene ejes de simetría.

c) La figura 3, con forma de corazón, y la figura 1 tienen un sólo eje de simetría.



d) El triángulo equilátero (figura 4) tiene tres ejes de simetría.

e) El rectángulo (figura 6) tiene dos ejes de simetría.



Estas rectas que se han trazado en las distintas figuras representan sus "ejes de simetría". Se trata de rectas que "separan" a la figura en dos partes congruentes, es decir, que si imagina la figura en papel y lo pliega por la línea que representa cada recta, al plegar, las partes se superponen exactamente.

Así podríamos seguir dando ejemplos de objetos simétricos, pero creemos que con éstos tiene una noción de la simetría en el plano, por eso lo invitamos a trabajar en la siguiente actividad:

Situación 2

Tome una hoja de papel blanca cualquiera, dibuje en ella una recta y luego tres puntos cualesquiera de un lado de la misma, como se muestra en la figura 1. Es importante que los puntos se marquen con una fibra con mucha tinta u otro elemento que tenga tinta. Posteriormente, pliegue la hoja a lo largo de la recta (figura 2) y presione ambas partes. Desdoble el papel y observe qué ocurre.

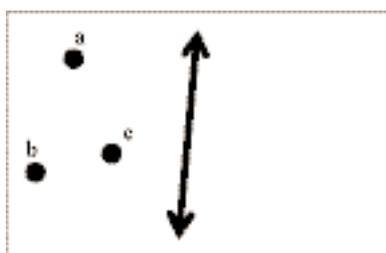


Figura 1

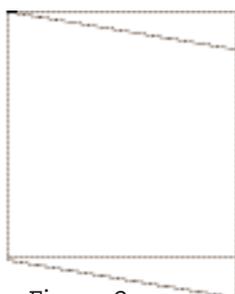


Figura 2

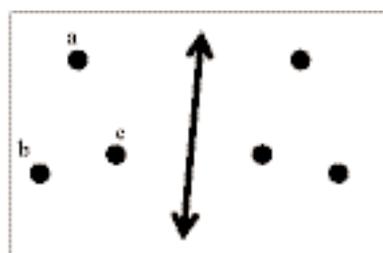


Figura 3

Efectivamente aparecen tres nuevos puntos que se encuentran a la derecha de la recta. Se dice que son los puntos simétricos a los representados inicialmente.

Este procedimiento que ha realizado le ha permitido obtener el simétrico de cada punto respecto de la recta considerada. Al punto simétrico de "a" nómbrelo "a'" (se lee a prima), al simétrico del punto "b" llámelo "b'" (se lee b prima) y al simétrico del punto "c" llámelo "c'" (se lee c prima).

La recta representada es el eje de simetría de los puntos representados.

Ahora, imagine que los tres puntos representados en un comienzo, a, b y c, son los vértices de un triángulo, como se ha representado en la figura 4. Nuevamente al plegar, realizando un dobléz por la recta representada, se obtiene un nuevo triángulo que es simétrico al triángulo representado inicialmente.

Gráficamente:

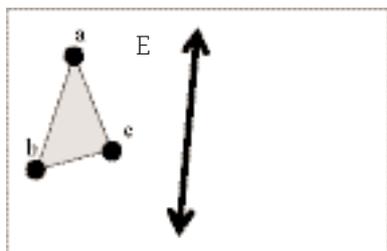


Figura 4



Figura 5

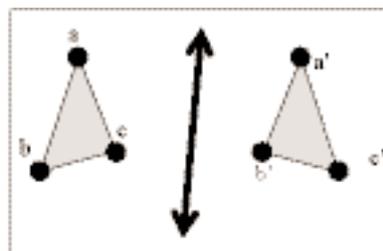


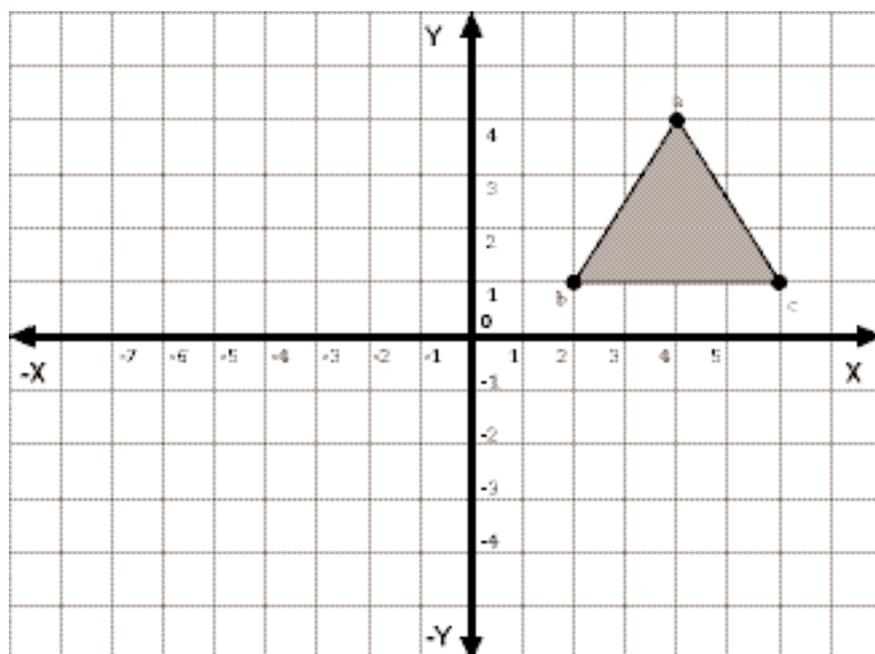
Figura 6

Luego, el triángulo abc y el triángulo $a'b'c'$ son **simétricos**. También se dice que el triángulo $a'b'c'$ es imagen del triángulo abc por medio de una simetría de eje E , en este caso, donde el eje de simetría es la recta "E" representada.

Situación 3

Usted ya conoce el sistema de referencia de coordenadas en el plano. En él se ha representado el triángulo abc .

a) En dicho sistema ubique los puntos a' , b' , c' de tal manera que resulten ser simétricos, respecto del eje de las abscisas o de las x de los puntos a , b y c , respectivamente.



b) Conecte los puntos a' , b' y c' por medio de segmentos y coloree la región interior. De esta manera obtiene el triángulo $a'b'c'$, que es el simétrico del triángulo abc respecto del eje de las x .

c) Complete la siguiente tabla que contiene las coordenadas de los puntos a , b y c con las coordenadas de los puntos simétricos (recuerde que primero se anotan las coordenadas del eje x y luego las del eje y).

Puntos	Coordenadas de los vértices del triángulo abc	Puntos	Coordenadas de los del triángulo a'b'c'
a	(4, 4)	a'	
b		b'	
c		c'	

d) ¿La figura obtenida el triángulo a'b'c', es congruente con la figura inicial, el triángulo abc?

Por ello, diremos que:

- Las figuras obtenidas son **congruentes**.
- El triángulo abc es **simétrico** al triángulo a'b'c'.
- El eje de las x es el **eje de simetría**.



PENSAR

Todas las situaciones que han sido consideradas nos llevan a pensar en la simetría como en una transformación del plano, por medio de la cual a partir de una figura es posible hallar su imagen, que es simétrica de la original respecto de un eje de simetría.

La figura inicial y su transformada, o imagen, resultan ser congruentes.

La simetría no es otra cosa que una **función** puntual (se consideran puntos) porque a cada punto de la figura inicial le hace corresponder uno y sólo un punto de la figura simétrica y viceversa, a cada punto de la figura imagen le corresponde un punto y sólo un punto de la figura inicial. Por esta característica y otras que posee esta función, la simetría de eje o simetría axial recibe el nombre de transformación en el plano.

Por ello hablamos de figura inicial que representa el "dominio" de esta transformación y de figura imagen que representa la "imagen de la función".

Vuelva nuevamente a la situación 2. Observe las representaciones obtenidas y complete la siguiente tabla con una cruz en el casillero correspondiente:

	SÍ	NO
La figura inicial y final tienen el mismo número de vértices		
Los ángulos de la figura inicial y de la figura imagen son congruentes		
Los lados de la figura inicial y de la figura imagen son congruentes		

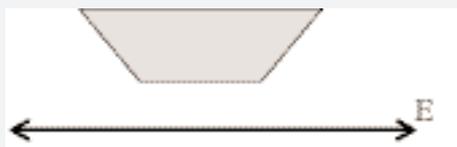


ACTIVIDADES

1. Dadas las siguientes figuras dibuje el o los ejes de simetría que visualice en ellas, siempre que sea posible:



2. Encuentre la figura simétrica a la dada:

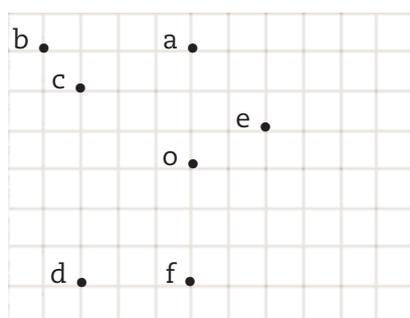


La simetría respecto de un eje no es la única simetría que existe. También puede estudiarse la simetría respecto de un punto, que se llama simetría central.

Simetría central

Situación 4

Observe el siguiente plano cuadriculado en el que se han señalado algunos puntos y, en particular, ubique el punto "o":



a) ¿Qué punto señalado en el plano cuadriculado pertenece a la misma recta a la que pertenecen los puntos a y o, y se

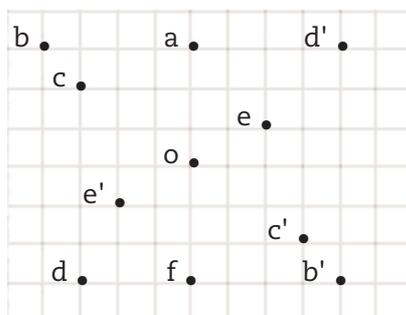
encuentra a igual distancia de "o" que el punto "a"?

b) Dibuje el punto del plano cuadrículado que pertenece a la misma recta a la que pertenecen los puntos "c" y "o", y que se encuentra a igual distancia de "o" que el punto "c", y llámelo "c'".

El punto "a" y el punto "f" son puntos simétricos respecto del punto "o". Se dice que el punto "f" es el punto simétrico de "a" con respecto al punto "o", llamado centro de simetría.

También el punto c' es el punto simétrico de c respecto del centro de simetría "o". Además suele decirse que c' es el punto imagen de c a través de una simetría de centro "o" o simetría central.

De la misma forma pueden ubicarse en el plano cuadrículado los puntos simétricos de cada uno de los puntos señalados.



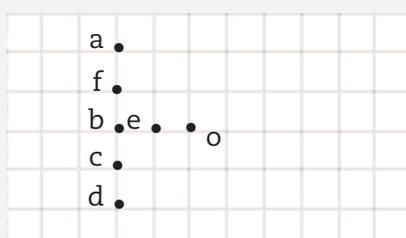
Observe el gráfico y complete:

- Los puntos a y son puntos simétricos respecto del punto "o".
- Los puntos b y, c y, d y, e y son puntos simétricos respecto del punto "o".
- El punto "o" es el de simetría.



ACTIVIDADES

1. En el siguiente cuadrículado encuentre los puntos simétricos de cada punto señalado respecto del punto "o", centro de simetría.

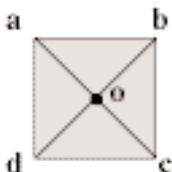


2. Observe el gráfico y complete:

- a) Los puntos a y son puntos simétricos respecto del punto "o".
- b) Los puntos b y, c y; d y; e y; f y son puntos simétricos respecto del punto "o".
- c) El punto "o" es el de simetría.

UBICACIÓN DEL CENTRO DE SIMETRÍA DE UN FIGURA

Para determinar si una figura tiene centro de simetría hay que ubicar un punto -que llamaremos "o"- perteneciente a la figura, de tal manera que cualquier otro punto de la misma tenga su simétrico, también en la figura, respecto del punto "o". Así por ejemplo, para determinar cuál es el centro de simetría de un cuadrado se busca el punto que cumpla con las características antes mencionadas. Si traza las diagonales del cuadrado verá que éstas se cortan en un punto que es el punto que buscamos.



• ¿Cuál es el punto simétrico al vértice "a" respecto del centro "o"?

.....

• ¿Cuál es el punto simétrico al vértice "d" respecto del centro "o"?

.....

• Dibuje un punto del cuadrado, llámelo "e" y ubique su simétrico respecto del centro "o".

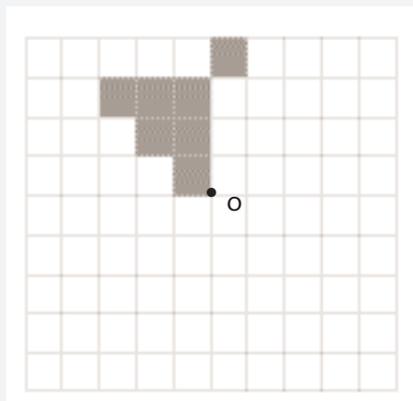
ACTIVIDADES



1. Dadas las siguientes figuras, marque el centro de simetría de las mismas y señale dos puntos que sean simétricos respecto del centro.



2. En el siguiente plano cuadrículado encuentre la figura que es simétrica a la representada, respecto del punto "o".



TRASLACIÓN

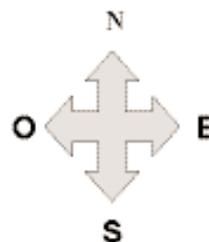
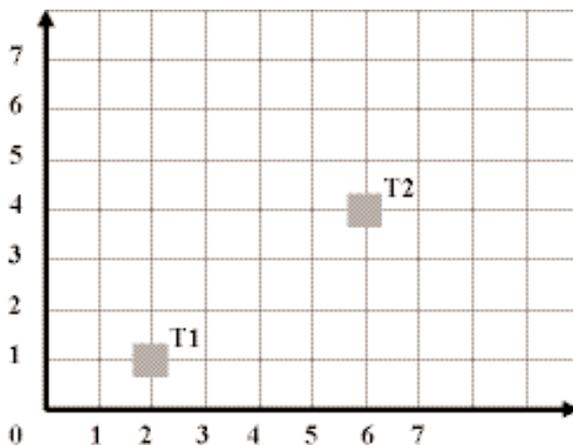
Lea atentamente las siguientes situaciones:

Situación 5

Consideremos el siguiente mapa de algunas calles de la ciudad de Mendoza:



Dicho mapa puede interpretarse sobre una cuadrícula como la que se muestra a continuación:



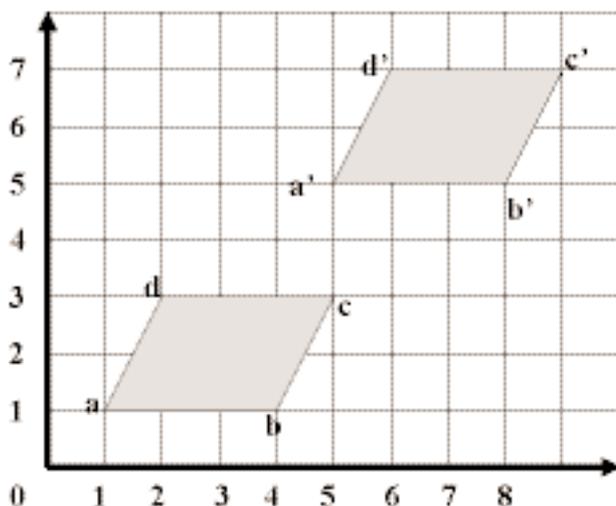
Dos autos se encuentran en su parada habitual de taxis, reciben un llamado de la central y se les ordena que deben recoger pasajeros siguiendo la dirección que se indica a cada uno:

- Taxi 1: cuatro cuadras al sur.
- Taxi 2: dos cuadras al oeste.

Indique con una cruz, sobre el cuadrículado, la nueva ubicación de cada uno de los taxis.

Situación 6

En el plano cuadrículado se han representado dos cuadriláteros: el cuadrilátero $abcd$ y el cuadrilátero $a'b'c'd'$ (se lee cuadrilátero a prima, b prima, c prima y d prima).



El cuadrilátero $abcd$, ¿qué tipo de cuadrilátero es?

.....

Ambos cuadriláteros representados son paralelogramos. Le solicitamos que complete la siguiente tabla con las coordenadas de los vértices indicados:

Coordenadas de los vértices del paralelogramo $abcd$	Coordenadas de los vértices del paralelogramo $a'b'c'd'$
a (1, 1)	a' (5, 5)
b (.....,)	b' (.....,)
c (.....,)	c' (.....,)
d (.....,)	d' (.....,)

Si observa las coordenadas del punto a, ¿qué variación debería hacer en cada una de ellas para obtener las coordenadas del punto a'?

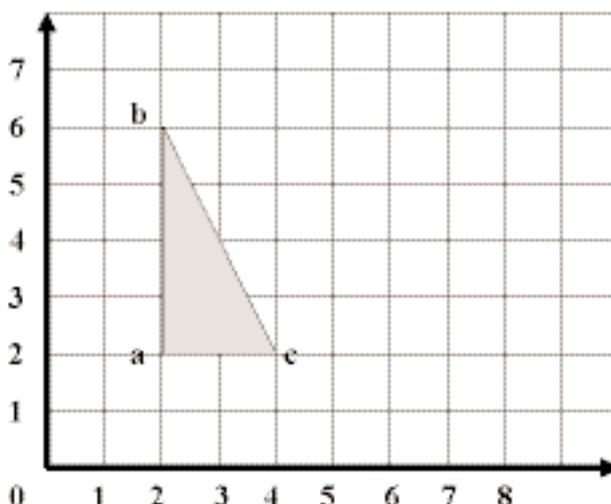
Ahora observe las coordenadas del punto b, ¿qué variación debería hacer en cada una de ellas para obtener las coordenadas del punto b'?

De esta manera, si a cada una de las coordenadas de los vértices del paralelogramo abcd se le suma el número 4, se obtienen las coordenadas de cada uno de los vértices del paralelogramo a'b'c'd'.

Si siguiera analizando las coordenadas de la misma forma para cada uno de los puntos del paralelogramo abcd obtendría que, en todos los casos, si a dichas coordenadas le sumara el número 4 obtendría las coordenadas de los correspondientes puntos del paralelogramo a'b'c'd'.

Por las características antes indicadas se dice que el paralelogramo a'b'c'd' es la imagen del paralelogramo abcd a través de una traslación, que a cada punto de la figura inicial (paralelogramo abcd) le hace corresponder un punto de la figura imagen (figura trasladada) cuyas coordenadas, en este ejemplo, se obtienen de sumarle el número 4 a las coordenadas de los puntos de la figura inicial.

Ahora le proponemos que encuentre la imagen del triángulo abc a través de una traslación, determinada por la siguiente indicación: a la primer coordenada hay que sumarle el número 4 y a la segunda coordenada hay que sumarle el número 1.



Al triángulo imagen obtenido llámelo triángulo a'b'c'.

Observe las características del paralelogramo abcd e imagine que lo recorta y lo superpone con el paralelogramo a'b'c'd'. ¿Qué ocurrirá? ¿Coincidirán exactamente o no?

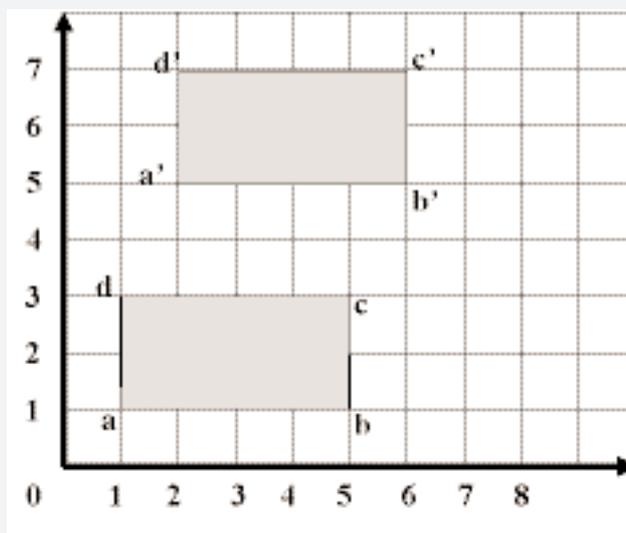
Ahora, si superpone el triángulo abc con el triángulo $a'b'c'$, ¿qué ocurre?

Como al superponer los pares de figuras en ambos casos coinciden exactamente, se dice que las figuras son congruentes, es decir que la figura inicial y la imagen obtenida a través de una traslación tienen igual medidas de la longitud de los lados, igual medida de la amplitud de sus ángulos y que si la figura inicial tiene lados paralelos la imagen también tendrá lados paralelos.



ACTIVIDADES

1. Observen la figura $abcd$ y determinen cómo se ha obtenido su imagen $a'b'c'd'$ por traslación.



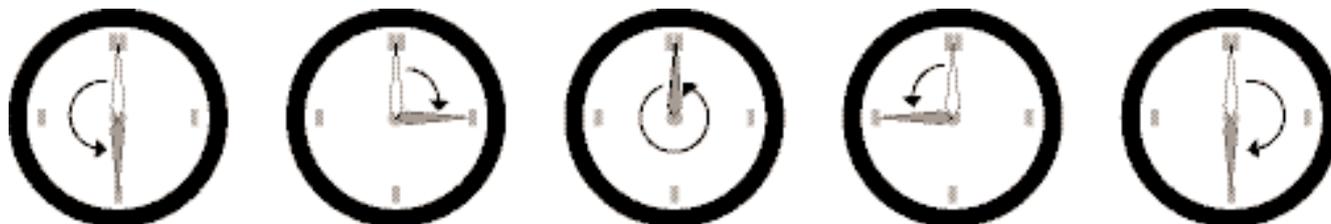
ROTACIÓN

Lea detenidamente las siguientes situaciones.

Situación 1

Un reloj poco común y con una sola aguja parte siempre de las 12 y funciona de la siguiente manera:

- Da giros completos a derecha o izquierda, o sea rota un ángulo de 360° .
- Da medio giro a la derecha o a la izquierda, o sea rota un ángulo de 180° .
- Da cuartos de giro a derecha o izquierda, o sea rota un ángulo de 90° .



- Identifique qué giro se produce en cada uno de los relojes dibujados, considerando que la aguja coloreada es la posición final de la aguja luego de realizar el giro correspondiente.

Situación 2

Una veleta gira y toma distintas posiciones. La veleta está representada por el siguiente dibujo:



Posición actual	Giro	Nueva ubicación
	Un giro en el sentido horario de 90 °	
	Un giro en el sentido antihorario de 180 °	
	Un giro completo en el sentido horario.	

Nota: sentido horario es el sentido de giro de las agujas del reloj y sentido antihorario es el sentido contrario al giro de las agujas del reloj.

El ejemplo de la veleta es un ejemplo de rotación. La rotación es, al igual que la simetría respecto de un eje, la simetría central y la traslación, una función puntual que a cada punto de una figura inicial le hace corresponder otro punto de la figura imagen.

Para poder definir una rotación se necesita:

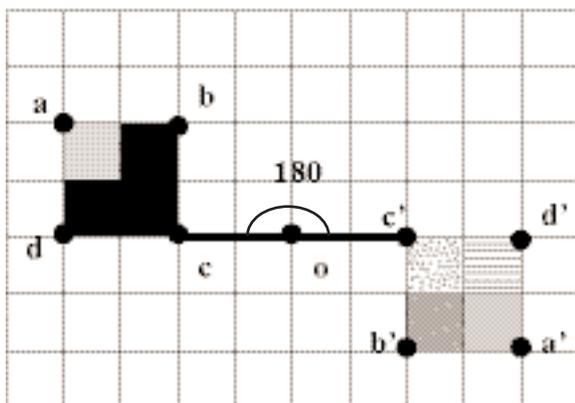
- un punto llamado centro de giro o de rotación,
- un ángulo llamado ángulo de giro y

- el sentido de giro (horario o antihorario).

De esta manera, en el ejemplo de la veleta, y considerando el centro de giro y el ángulo de giro correspondiente a cada situación, las posiciones de la veleta luego de las rotaciones indicadas son:



Observe las siguientes figuras: el cuadrado $a'b'c'd'$ es la imagen del cuadrado $abcd$ a través de una rotación realizada en sentido horario.



La rotación aplicada en este ejemplo es en sentido horario, el centro de rotación es el punto "o" señalado y el ángulo de giro es de 180° .

Observando la figura podrá ver que si conecta cada vértice de la figura inicial con el centro de rotación y éste con el vértice correspondiente de la figura imagen rotada, queda determinado el ángulo de giro, que en este caso es de 180° .

ACTIVIDADES



1. En la misma cuadrícula anterior rote el cuadrado $abcd$, con un ángulo de giro de 90° y cuyo centro de rotación es el punto "o" y en sentido horario.

2. Observe y responda: ¿la figura inicial y la figura imagen resultan ser congruentes? ¿Por qué?

.....

.....

.....

.....

Es decir, que una figura y su imagen, obtenida a través de una rotación, resultan ser congruentes.

HOMOTECIA



LEER

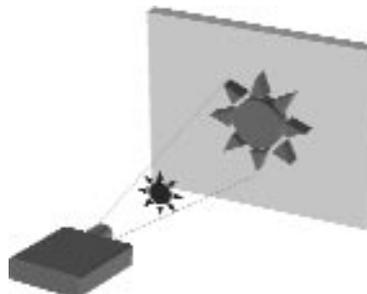
"Si el proyector se coloca convenientemente, la imagen en la película y la imagen proyectada en la pantalla son semejantes. Para obtener una buena proyección, la pantalla se coloca a una distancia fija del proyector.

Si la pantalla se coloca a la mitad de esa distancia del proyector, la imagen obtenida se reduce también a la mitad.

Si la pantalla se coloca al doble de esa distancia del proyector, las dimensiones de la nueva imagen son también el doble.....

En una homotecia, la imagen es semejante a la figura original".

Larotonda, Wykowski, Ferrarini. Matemática 9, Kapelusz .



Cuando se define una homotecia es necesario indicar un punto "o" que es el centro de la homotecia. En el ejemplo es la fuente de luz del proyector y un número real distinto de cero " ", que es la razón de la homotecia. Esta razón indica en qué proporción la imagen se agranda o no. Así por ejemplo, si las dimensiones de la figura imagen son el doble de la figura original la razón es igual a dos.

Lea atentamente las siguientes situaciones.

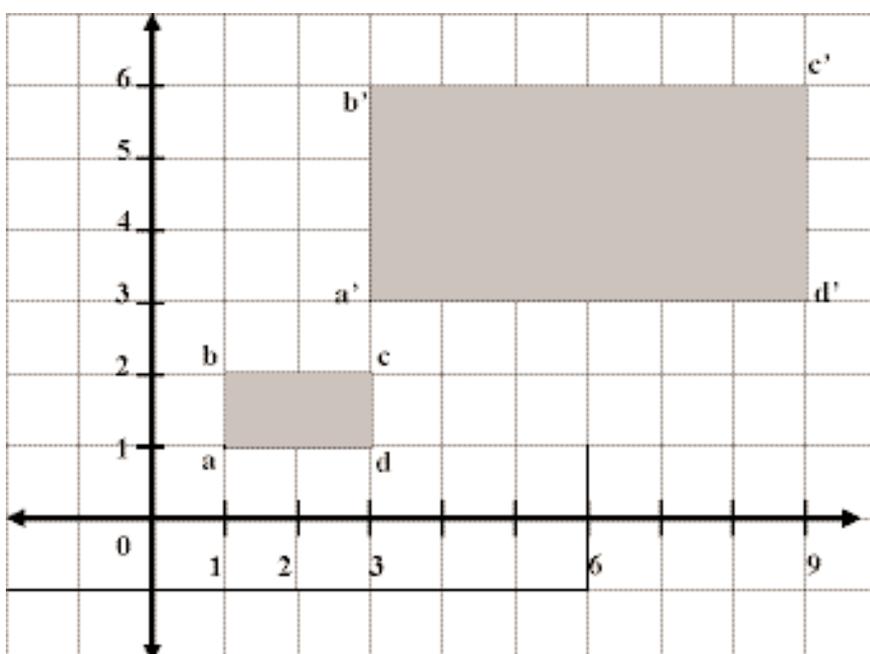
Situación 1

Consideremos un sistema de referencia cartesiano. En él se ha delimitado una zona especial que está representada por la región sombreada. La zona representada corresponde a un sector de calles de nuestra ciudad en donde se realizará el control de contaminación vehicular. Los organizadores piensan que sería mejor realizarla en otro lado y triplicar las dimensiones de la zona de control, a los efectos de realizar un mejor trabajo de prevención.

Para triplicar el tamaño, uno de los organizadores pensó en realizar la siguiente tabla:

Puntos de la figura inicial	Coordenadas iniciales	Triple de cada coordenada	Nuevas coordenadas	Puntos de la figura imagen
a	(1, 1)	$1 \cdot 3 = 3 ; 1 \cdot 3 = 3$	(3, 3)	a'
b	(1, 2)	$1 \cdot 3 = 3 ; 2 \cdot 3 = 6$	(3, 6)	b'
c	(3, 2)	$3 \cdot 3 = 9 ; 2 \cdot 3 = 6$	(9, 6)	c'
d	(3, 1)	$3 \cdot 3 = 9 ; 1 \cdot 3 = 3$	(9, 3)	d'

A partir de esta tabla, se grafica de la siguiente manera toda la situación:



Conclusión

La nueva figura obtenida es la imagen de la figura inicial al aplicarle una homotecia, en la que el centro "o" coincide con el punto (0, 0) y su razón es 3.

Matemáticamente se dice que el rectángulo a'b'c'd' es imagen del rectángulo abcd por medio de una homotecia de centro o y razón 3.

El rectángulo abcd y el rectángulo a'b'c'd' son semejantes.

Situación 2

Un diseñador gráfico está haciendo un boceto de un nuevo logo para una compañía telefónica. El dibujo original es el que se muestra a continuación:

A los efectos de una prueba se decide hacer el mismo logo pero del **doble** de tamaño. El nuevo modelo es el siguiente:



Si observamos la figura inicial y su imagen o figura transformada, podemos decir que dicha transformación es una homotecia de razón 2 y centro "o" que es el punto (0, 0).

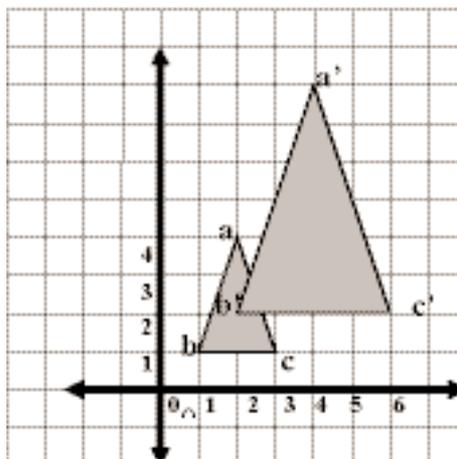
Luego, la figura inicial y su imagen **son semejantes**.

Situación 3

Para hacer...

Observe el gráfico. La figura inicial es el triángulo abc y su imagen o figura transformada es el triángulo a'b'c', obtenida por medio de una homotecia de centro "o" que coincide con el origen del sistema de coordenadas. Lo que no se conoce es la razón de semejanza. ¿Podría usted determinar cuál es la razón de semejanza?

.....



Observando las figuras realice lo siguiente:

- Mida el lado ab del triángulo inicial y luego su correspondiente, el lado a'b', en el triángulo imagen. ¿Cuáles son esas medidas? ¿Existe diferencia entre ellas?

¿Cuál?

.....

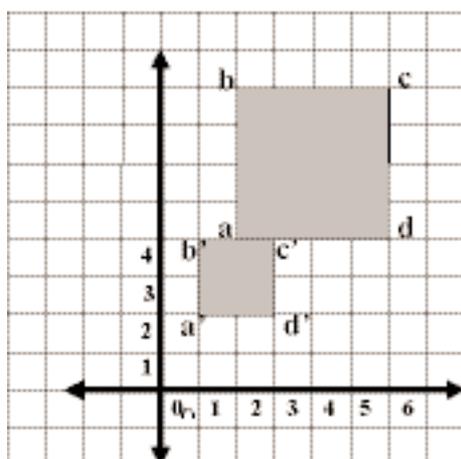
- Mida el ángulo $\hat{b}ad$ y su correspondiente $\hat{b}'a'd'$. ¿Observa lo mismo que entre las medidas anteriores? ¿Por qué?

.....

- Observe si se verifica lo mismo al considerar otro ángulo y otro lado.

Observe la figura inicial: el cuadrado $abcd$ y su imagen (o figura transformada), el cuadrado $a'b'c'd'$, por medio de una homotecia de centro "o" que coincide con el origen del sistema de coordenadas y lo que no se sabe es la razón de semejanza. ¿Podría determinar cuál es la razón de semejanza?

.....



Observando las figuras realice lo siguiente:

- Mida el lado bc del cuadrado inicial y luego su correspondiente, el lado $b'c'$, en el cuadrado imagen. ¿Cómo variaron las medidas? ¿aumentaron o disminuyeron? ¿Cuánto?
- Mida el ángulo $\hat{b}ad$ y su correspondiente $\hat{b}'a'd'$ ¿Qué ocurre con las medidas de dichos ángulos?
- Observe si se verifica lo mismo al considerar otro ángulo y otro lado.

Considerando las situaciones analizadas es posible decir que en las homotecias:

- Los ángulos de la figura inicial y los de la figura imagen tienen la misma medida.

- Las medidas de la longitud de los lados varían entre una figura y su transformada (o figura imagen) en forma proporcional.
- Si en la figura inicial hay lados paralelos también los lados correspondientes de la figura imagen resultarán paralelos.

FIGURAS SEMEJANTES

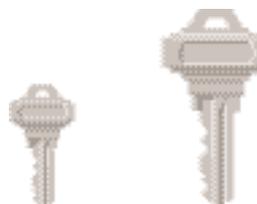


PENSAR

Lea atentamente las siguientes situaciones.

Situación 1

Las siguientes figuras son semejantes.



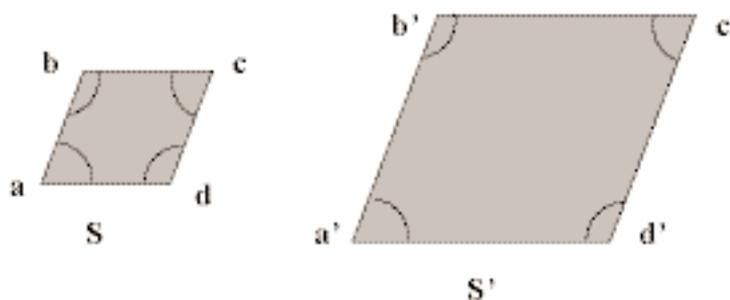
Situación 2

Las siguientes figuras no son semejantes.



Situación 3

La fotocopia ampliada de la figura S resulta ser una figura S'.



La figura S y S' son semejantes, o bien se dice que el paralelogramo a'b'c'd' es semejante al paralelogramo abcd.

Y la semejanza es una función que al punto a de S le hace corresponder el punto a' de S' y al punto b de S le hace corresponder el punto b' de S' y así se podrían seguir nombrando puntos de S y sus correspondientes puntos en S' , que son sus imágenes. También se dice que tanto los puntos a y a' como los, b y b' son correspondientes.

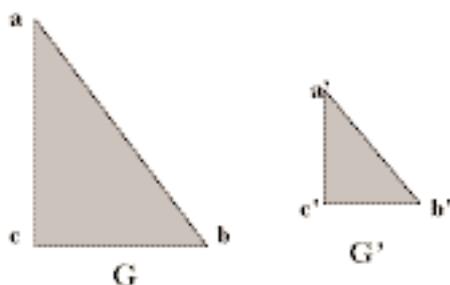
Algo similar ocurre con los ángulos. El ángulo $a\hat{b}c$ de S y el ángulo $a'\hat{b}'c'$ de S' son correspondientes. Coloree dichos ángulos correspondientes.

Marque con color el lado bc del paralelogramo S . ¿Cuál es el lado correspondiente a él en el paralelogramo S' ? Márquelo.

Luego el lado bc y $b'c'$ son correspondientes

Situación 4

La fotocopia reducida de la figura G resulta ser la figura G' , que es semejante a G .



Ángulo del triángulo abc	Ángulo correspondiente en el triángulo $a'b'c'$
$c\hat{a}b$
$a\hat{b}c$
$b\hat{a}c$

Lado del triángulo abc	Lado correspondiente en el triángulo $a'b'c'$
\overline{ab}
\overline{bc}
\overline{ca}

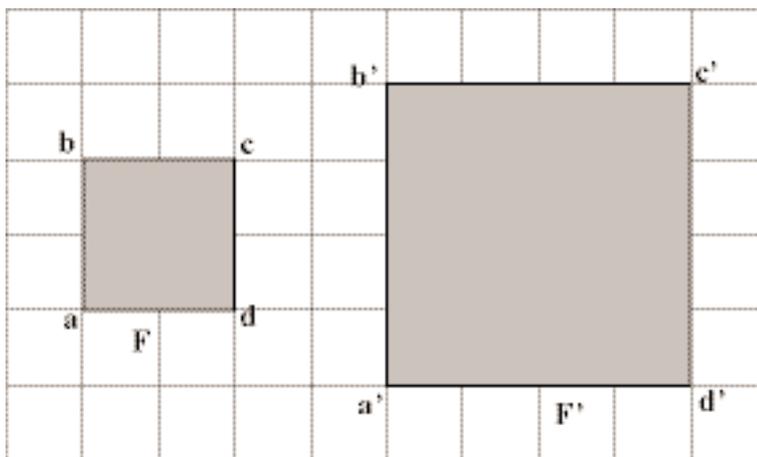
Conclusión

Dados dos polígonos semejantes es posible determinar pares de lados y ángulos correspondientes.

Situación 4

Tenemos el siguiente cuadrado abcd (figura F) sobre un plano cuadrículado. Si se realiza su ampliación al doble de su tamaño se obtiene el cuadrado a'b'c'd' (Figura F') que resulta ser semejante al cuadrado abcd.

La figura F y F' son semejantes.



- Mida y compare las medidas de los ángulos correspondientes de las figuras semejantes, ¿Cómo resultan esas medidas? Es decir, ¿qué relación encuentra entre ellas? Entonces, ¿qué puede decir de los ángulos correspondientes?

- Considere que cada lado de los cuadrados de la cuadrícula donde se han representado a las figuras tiene una cantidad de longitud de 1 cm. Escriba la medida de los lados de una figura y la de los correspondientes lados de la otra figura:

$$|\overline{ab}| = \dots\dots\dots, |\overline{a'b'}| = \dots\dots\dots \qquad |\overline{bc}| = \dots\dots\dots, |\overline{b'c'}| = \dots\dots\dots$$

$$|\overline{cd}| = \dots\dots\dots, |\overline{c'd'}| = \dots\dots\dots \qquad |\overline{ad}| = \dots\dots\dots, |\overline{a'd'}| = \dots\dots\dots$$

Observe las medidas obtenidas y piense en un número que al multiplicarlo por la medida de la longitud de cada lado de la figura inicial se obtenga la medida de la longitud del lado correspondiente de la figura imagen. ¿Cuál es ese número en este ejemplo?

Cuando esto ocurre se dice que los lados correspondientes de las figuras son proporcionales y la razón de la homotecia coincide con el número que encontró anteriormente; es decir que la razón de la homotecia en este ejemplo es dos.

Luego, se puede concluir que en estas figuras semejantes se cumple que:

- Los ángulos correspondientes son congruentes. Así:

$$|\widehat{d\hat{a}b}| = |\widehat{d'a'b'}| = 90 ; |\widehat{b\hat{c}l}| = |\widehat{a'b'c'}| = 90$$

$$|\widehat{b\hat{c}d}| = |\widehat{b'c'd'}| = 90 ; |\widehat{c\hat{d}a}| = |\widehat{c'd'a'}| = 90$$

- Los lados correspondientes son proporcionales. Así si realiza, para cada par de lados correspondientes, la razón o cociente entre sus medidas obtiene un valor constante llamado razón de semejanza.

$$\frac{|\overline{a'b'}|}{|\overline{ab}|} = \frac{4}{2} = 2 ; \quad \frac{|\overline{b'c'}|}{|\overline{bc}|} = \frac{4}{2} = 2 ;$$

$$\frac{|\overline{c'd'}|}{|\overline{cd}|} = \frac{4}{2} = 2 ; \quad \frac{|\overline{a'd'}|}{|\overline{ad}|} = \frac{4}{2} = 2 ;$$

Luego, la **razón de semejanza** es 2. **Observe.** La razón de la homotecia es 2 y es igual a la razón de semejanza, que también es 2. Es decir que cuando se aplica una homotecia de razón 2 la figura inicial y su imagen resultan ser semejantes y la razón de la semejanza es 2. Esta característica es válida para cualquier razón de homotecia.

PENSAR

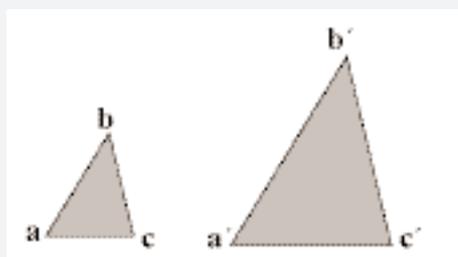


Dos figuras son semejantes si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales. La razón entre los lados correspondientes se llama razón de semejanza.

ACTIVIDADES

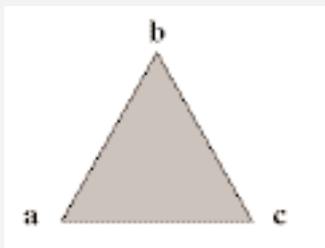


1. Dada la siguiente afirmación: "los triángulos abc y a'b'c' son semejantes".

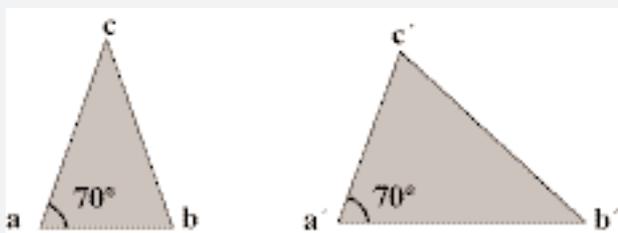


¿Qué harían ustedes para justificar tal afirmación?

2. Construyan un triángulo equilátero que sea semejante al dado.



3. Dados los siguientes triángulos:



Observen que:

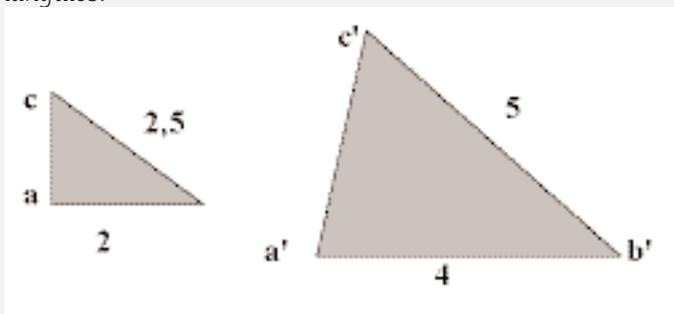
- La medida del ángulo cab es igual a la medida del ángulo c'a'b'.

Sin embargo, el triángulo abc **no es semejante** al triángulo a'b'c'. ¿Podrían decir por qué?

4. Dado el cuadrilátero abcd, construyan otro semejante donde la razón de semejanza sea 3.



5. Dados los siguientes triángulos:



Observen que: • Hay proporcionalidad entre los lados. :

$$\frac{|\overline{a'b'}|}{|\overline{ab}|} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{|\overline{c'b'}|}{|\overline{cb}|} = \frac{5}{2,5} = 2$$

Respondan: ¿el triángulo abc es semejante al triángulo a'b'c'? ¿Por qué?

6. Propongan una figura elegida por ustedes y construyan otra que sea semejante. Para ello pueden utilizar distintos recursos como por ejemplo utilizar una fotocopidora que amplíe o reduzca la figura que usted eligió o utilizar un plano cuadriculado.

Nota: al resolver las situaciones 4 y 5 planteadas anteriormente puede concluir que:

- No es suficiente que dos triángulos tengan sólo un ángulo congruente para ser semejantes.
- Tampoco es suficiente que dos triángulos tengan sólo dos lados proporcionales para ser semejantes.

Triángulos semejantes

Usted ya sabe que dos polígonos son semejantes si tienen los lados correspondientes proporcionales y los ángulos correspondientes congruentes.

Pero cuando se trata de triángulos no es necesario verificar tantos aspectos, es decir verificar que todos los ángulos correspondientes sean congruentes o que todos los lados correspondientes sean proporcionales. A veces, si se cumplen algunas de estas condiciones es suficiente para que se cumplan las demás y asegurar que se trata de triángulos semejantes. Estas condiciones mínimas o básicas reciben el nombre de **criterios de semejanza** de triángulos. Estos criterios, y el cumplimiento o no de los mismos, nos permiten opinar con fundamento sobre si los triángulos analizados son o no semejantes.

Para analizar estos criterios, le proponemos leer atentamente las siguientes situaciones.

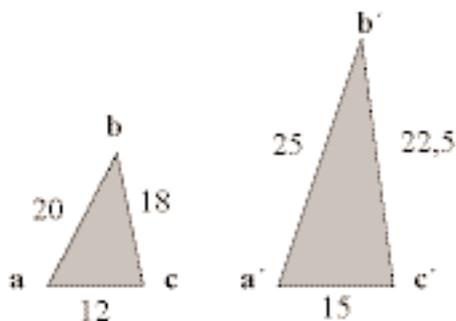
PENSAR



Situación 1

El primer criterio de semejanza de triángulos dice: “dos triángulos son semejantes si hay proporcionalidad entre sus tres lados correspondientes”.

Observe el siguiente ejemplo. Dados los siguientes triángulos:



Observe que hay proporcionalidad entre los lados:

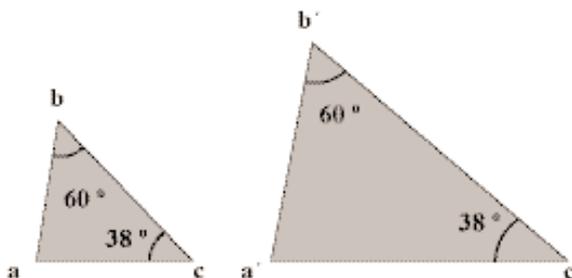
$$\frac{|a'b'|}{|ab|} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4} = 1,25 \quad \frac{|a'c'|}{|ac|} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} = 1,25 \quad \frac{|b'c'|}{|bc|} = \frac{22,5}{18} = 1,25$$

Si usted sólo verifica que los lados correspondientes son proporcionales ya puede asegurar que los ángulos correspondientes son congruentes (sin necesidad de medirlos para verificarlo). Por lo tanto, si de dos triángulos conocemos que sus lados correspondientes son proporcionales entonces sabemos que son semejantes, como ocurre en el caso representado en el que el triángulo abc es semejante al triángulo $a'b'c'$.

Primer criterio de semejanza de triángulos. Dos triángulos son semejantes si hay proporcionalidad entre sus tres lados correspondientes.

Situación 2

El segundo criterio de semejanza de triángulos dice: dos triángulos son semejantes si dos ángulos de uno son congruentes con los dos ángulos correspondientes del otro. Observe el siguiente ejemplo. Dados los siguientes triángulos:



Observe que hay ángulos congruentes: $|\hat{b}| = |\hat{b}'|$; $|\hat{c}| = |\hat{c}'|$. Luego, el triángulo abc es semejante al triángulo $a'b'c'$.

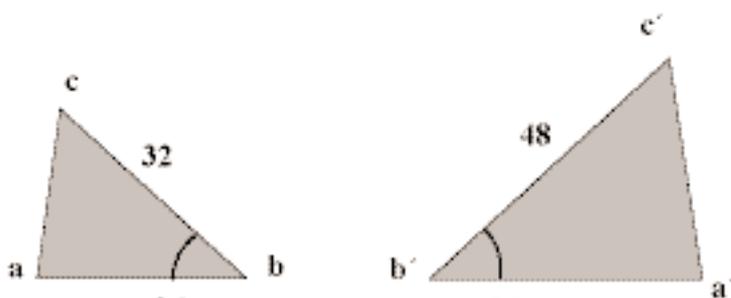
Con sólo verificar que dos pares de ángulos correspondientes son congruentes resultará que el otro par de ángulos correspondientes resultarán ser congruentes (sin necesidad de medirlos para verificarlo) y además se verificará la proporcionalidad de los lados correspondientes. Por lo tanto, si de dos triángulos conocemos que tienen dos pares de ángulos

correspondientes congruentes entonces sabemos que son semejantes, como ocurre en el caso representado en el que el triángulo abc es semejante al triángulo $a'b'c'$.

Segundo criterio de semejanza de triángulos. Dos triángulos son semejantes si dos ángulos de uno son congruentes a los dos ángulos correspondientes del otro.

Situación 3

El tercer criterio de semejanza de triángulos dice: “dos triángulos son semejantes si dos lados de uno son proporcionales a los dos lados correspondientes del otro y los ángulos comprendidos entre esos lados son congruentes”. Observe el siguiente ejemplo. Dados los siguientes triángulos:



Observe que:

- Hay proporcionalidad entre los lados

$$\frac{|c'b'|}{|cb|} = \frac{48}{32} = \frac{3}{2} = 1,5 \qquad \frac{|a'b'|}{|ab|} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2} = 1,5$$

- Los ángulos correspondientes comprendidos entre estos dos lados son congruentes.

$$|c\hat{b}a| = |c'\hat{b}'a'|$$

Luego, el triángulo abc es semejante al triángulo $a'b'c'$.

Con sólo verificar que los dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos comprendidos entre ellos resulten ser ángulos correspondientes congruentes es suficiente para asegurar que dichos triángulos son semejantes. Por lo tanto, si de dos triángulos conocemos que tienen dos pares de lados correspondientes proporcionales y los ángulos comprendidos entre ellos son ángulos correspondientes congruentes entonces podemos decir que son semejantes, como ocurre en el caso representado, en el que el triángulo abc es semejante al triángulo $a'b'c'$.

Tercer criterio de semejanza de triángulos. Dos triángulos son semejantes si dos lados de uno son proporcionales a dos lados del otro y los ángulos comprendidos entre esos lados son congruentes.

Conclusión general

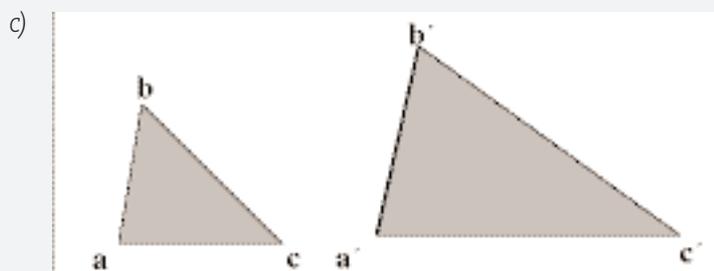
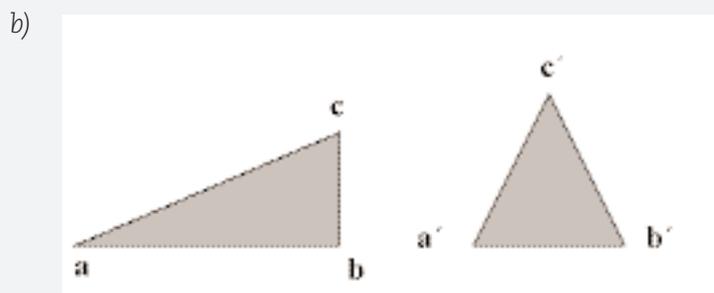
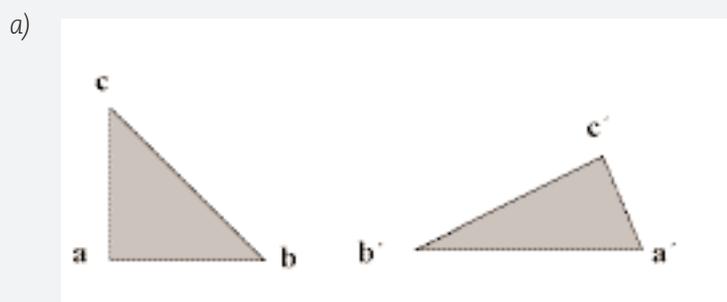
Dos triángulos son semejantes si se verifica una de las siguientes condiciones:

- Los tres lados de uno de los triángulos son proporcionales a los tres lados correspondientes del otro triángulo.
- Dos de los ángulos de un triángulo son congruentes a los dos ángulos correspondientes del otro.
- Dos lados de uno de los triángulos son proporcionales a los dos lados correspondientes del otro y además los ángulos comprendidos entre esos lados son congruentes.



ACTIVIDADES

1. Dados los siguientes pares de triángulos, elija uno de los criterios y úselo para determinar si se trata de triángulos semejantes o no.



2. Dadas las siguientes situaciones, en las que se da información referida a los triángulos abc y $a'b'c'$, determine si los triángulos abc y $a'b'c'$ son semejantes e indique qué criterio es el que justifica tal situación. En caso de ser necesario, o para una mejor comprensión, puede resultarle conveniente realizar una representación gráfica.

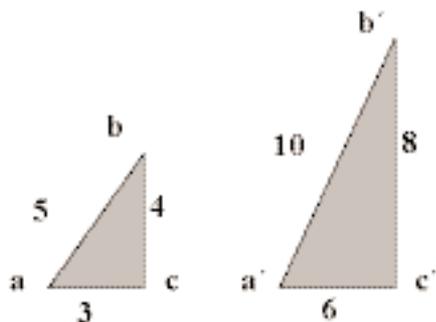
Caso A	
h $ \overline{ab} = 10$	$ \overline{a'b'} = 25$
h $ \overline{bc} = 18$	$ \overline{b'c'} = 45$
h $ \overline{ca} = 12$	$ \overline{c'a'} = 30$

PERÍMETRO Y SUPERFICIE DE TRIÁNGULOS SEMEJANTES

Lea atentamente las siguientes situaciones.

Situación 1

Los triángulos dados son semejantes:



Calcule y anote el resultado que se pide:

a) La razón entre el lado $\overline{a'b'}$ y el lado \overline{ab}

.....

b) El perímetro del triángulo abc y del triángulo a'b'c'

Per. abc = Per. a'b'c' =

c) La razón entre el perímetro del triángulo a'b'c' con el perímetro del triángulo abc

$$\frac{\text{Per } a'b'c'}{\text{Per } abc}$$

Seguramente coincidirá con estos resultados:

- Razón entre los lados: $\frac{|\overline{a'b'}|}{|\overline{ab}|} = \frac{10}{5} = 2$

- Razón entre los perímetros: $\frac{\text{Per } a'b'c'}{\text{Per } abc} = \frac{24}{12} = 2$

¿Qué puede decir de los resultados obtenidos?

.....

Conclusión

La razón entre los lados correspondientes de dos triángulos semejantes es igual a la razón entre sus perímetros.

Situación 2

Considere los mismos triángulos de la situación 1. Calcule lo que se pide y anote los resultados.

a) La razón entre el lado bc y el lado $b'c'$

b) La medida de la superficie del triángulo abc y del triángulo $a'b'c'$, es decir sus áreas:

área del triángulo abc = área del triángulo $a'b'c'$ =

c) La razón entre el área del triángulo $a'b'c'$ y el área del triángulo abc es:

Compare los resultados obtenidos en el ítem a y en el c. ¿Cómo resultan la razón entre los lados proporcionales y la razón entre las áreas de los triángulos?

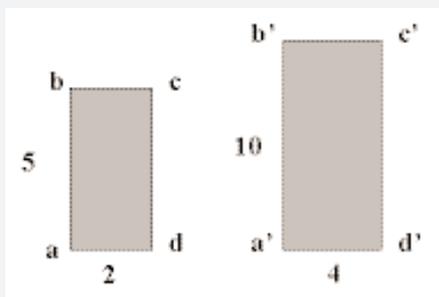
Obtenemos así la siguiente conclusión:

La razón entre los lados correspondientes de dos triángulos semejantes es igual a la mitad de la razón entre las áreas de dichos triángulos.



ACTIVIDADES

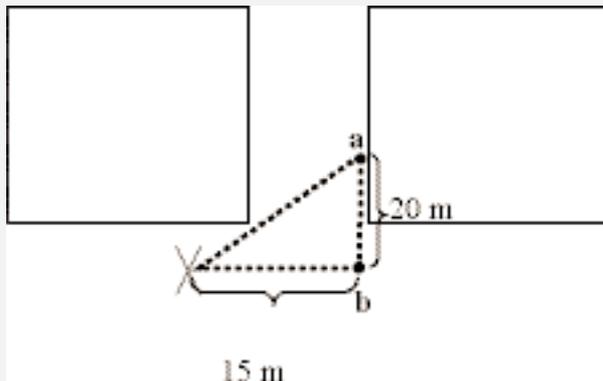
Repita los pasos a, b y c de las dos situaciones anteriores y verifique si obtiene las mismas conclusiones respecto del perímetro y superficie con el cuadrilátero $abcd$ y el cuadrilátero $a'b'c'd'$.





ACTIVIDADES

1. Suponga que se ha producido un accidente de tránsito y ustedes deben realizar un croquis que muestre el punto de impacto entre los dos vehículos y la posición en la que quedaron luego del accidente, especificando las distancias correspondientes. En la siguiente representación se muestra un esquema que no está a escala, es decir que no es semejante a la realidad, y donde se muestra con una cruz el lugar del impacto y con los puntos a y b la ubicación final de los automóviles que impactaron:



Supongan que ustedes llegan al lugar del accidente, se sitúan en la cruz donde se produjo el impacto y determinan qué distancia hay aproximadamente desde ese punto al auto b y de éste al auto a.

Las distancias que ustedes estiman se señalan en el gráfico.

Deben elaborar un informe presentando el croquis a escala no como el anterior: que muestre de la forma más clara y precisa las posiciones de los autos. Una manera de lograrlo es representar gráficamente un triángulo que sea semejante al triángulo real que se determinó al considerar la ubicación final de los dos autos y el punto de impacto.

Realicen dicho croquis considerando que los lados correspondientes de los triángulos deben ser proporcionales y los ángulos correspondientes congruentes. Utilicen el tercer criterio de semejanza y consideren que el ángulo cuyo vértice es el punto b tiene una amplitud de 90° .

2. Supongan que en un puente se ha producido un accidente y se ha desbarrancado un auto. Si saben que la cantidad de longitud del puente es de 43m y la altura del barranco es de 12 metros, al realizar el croquis que represente el puente con un segmento de 4,3cm., ¿de cuántos cm. deberán representar la altura del barranco? ¿De cuántos cm. representarán el largo del auto (supongan un auto y consideren las dimensiones reales)?



Nota: está representando segmentos semejantes.

CUERPOS

Lea atentamente las siguientes situaciones.

Situación 1

Las siguientes representaciones corresponden a cuerpos poliedros.



Las caras o superficies que limitan a cada uno de los cuerpos representados ¿son superficies planas o curvas?

.....

Situación 2

Las siguientes representaciones corresponden a cuerpos que son poliedros regulares.



cubo

dodecaedro

icosaedro

octaedro

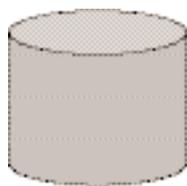
Observe que representan cuerpos poliedros porque todas sus caras son planas; están limitados por superficies planas. ¿Podría decir por qué son regulares?

.....

Observe que las caras de cada uno de ellos corresponden a polígonos que son regulares (polígonos que tienen lados y ángulos congruentes).

Situación 3

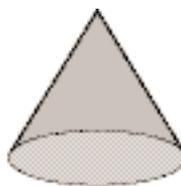
Las siguientes figuras representan a cuerpos redondos.



cilindro



esfera



cono

Las caras o superficies que limitan a cada uno de los cuerpos representados ¿son todas superficies planas?

.....

¿Qué cuerpos de los representados tienen al menos una cara curva?

.....

RECORDAR

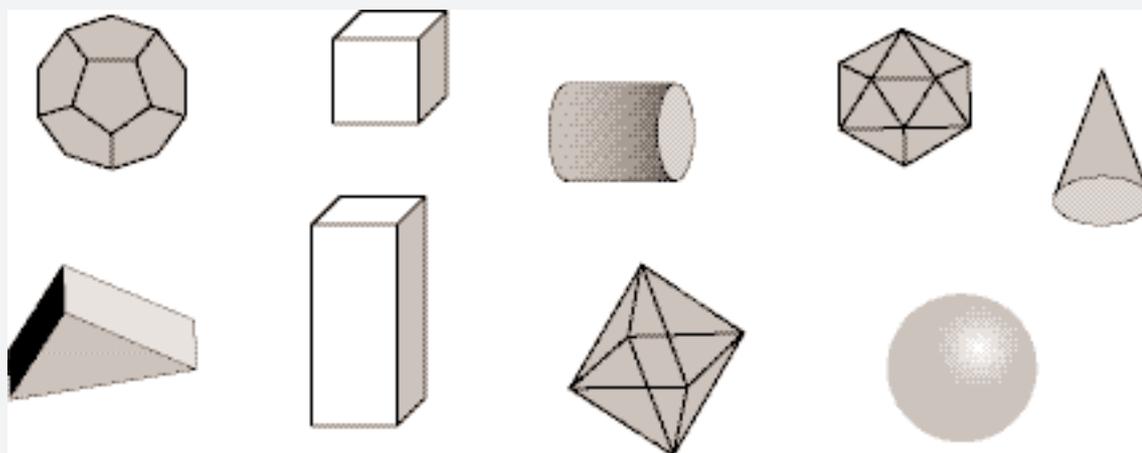


- *Cuerpos poliedros: son aquellos cuerpos que están limitados por todas superficies planas. Diremos que sus fronteras están formadas por superficies planas.*
- *Poliedros regulares: un poliedro es regular si todas sus caras tienen la misma forma y son polígonos regulares.*
- *Cuerpos redondos: son aquellos cuerpos que están limitados por al menos una superficie curva.*

ACTIVIDADES

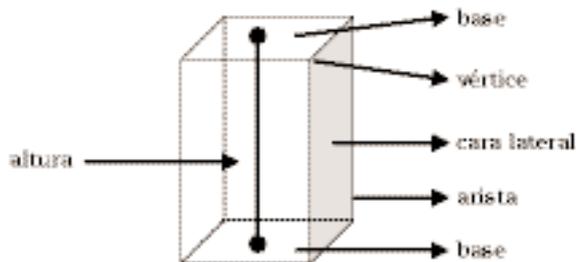


1. Observe atentamente las siguientes figuras y marque con una cruz aquellos cuerpos que sean poliedros y rodee con una línea aquellos que sean cuerpos redondos.



Elementos de algunos cuerpos

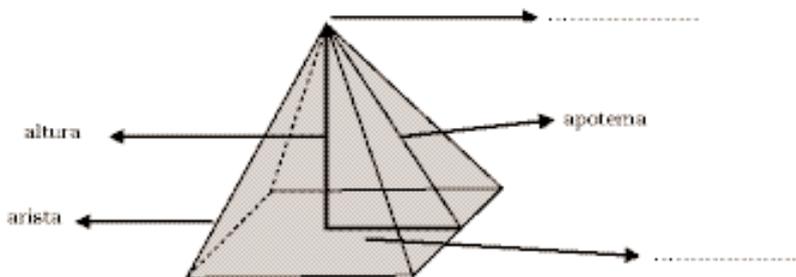
En el siguiente prisma se han señalado sus elementos:



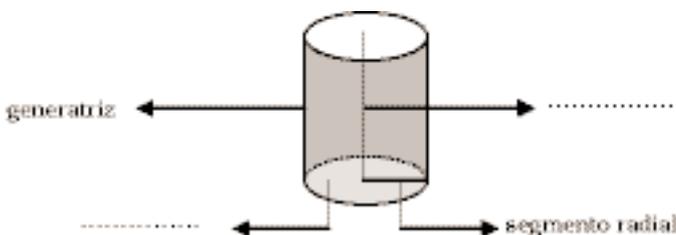
Observe que:

- **Arista:** conjunto de puntos intersección de 2 caras.
- **Vértice:** intersección de 3 o más aristas.
- **Altura:** distancia entre los planos de las bases.

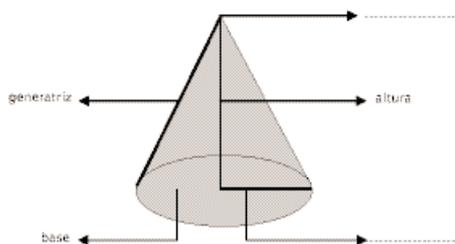
Complete, en la siguiente representación de una pirámide, los elementos que faltan:



Complete, en la siguiente representación de un cilindro, los elementos que faltan:



Complete, en la siguiente representación de un cono, los elementos que faltan:



apotema



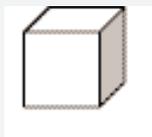
Segmento cuyos extremos son el vértice de la pirámide y el punto medio de una arista de la base.

Redes o desarrollos de algunos cuerpos



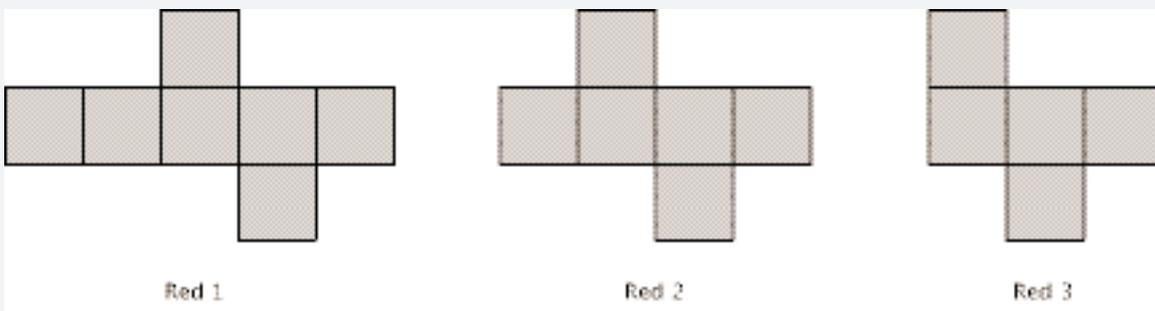
ACTIVIDADES

1. Observe el cuerpo representado:



Si se le pide construir un cuerpo similar al cubo representado y para que lo arme le muestran los siguientes desarrollos, de entre los cuales uno sería la red que usted debería marcar en una cartulina, recortar y plegar para armar el cubo pedido.

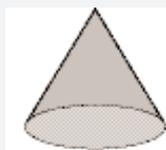
a) ¿Cuál de las redes elegiría para armar el cubo?



b) ¿Por qué elige esa red y no otra?

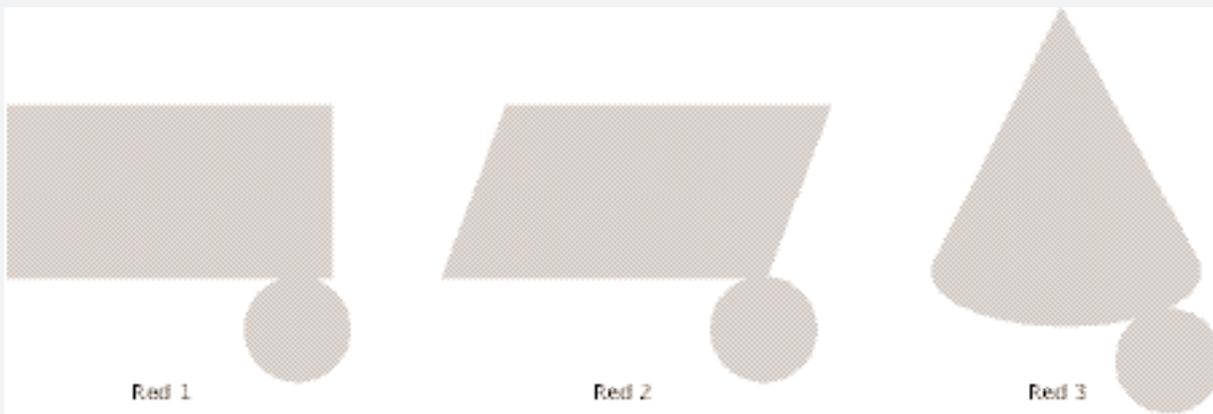
.....

2. Observe el cuerpo representado:



Si se le pide construir un cuerpo similar al cono representado y para que lo arme le muestran los siguientes desarrollos, de entre los cuales uno sería la red que usted debería marcar en una cartulina, recortar y plegar para armar el cono pedido.

a) ¿Cuál de las redes elegiría para armar el cono?



b) ¿Por qué elige esa red y no otra?

.....



ACTIVIDADES

1. Observe el grupo de poliedros de la izquierda. Asocie a cada figura con su red correspondiente y complete la tabla.

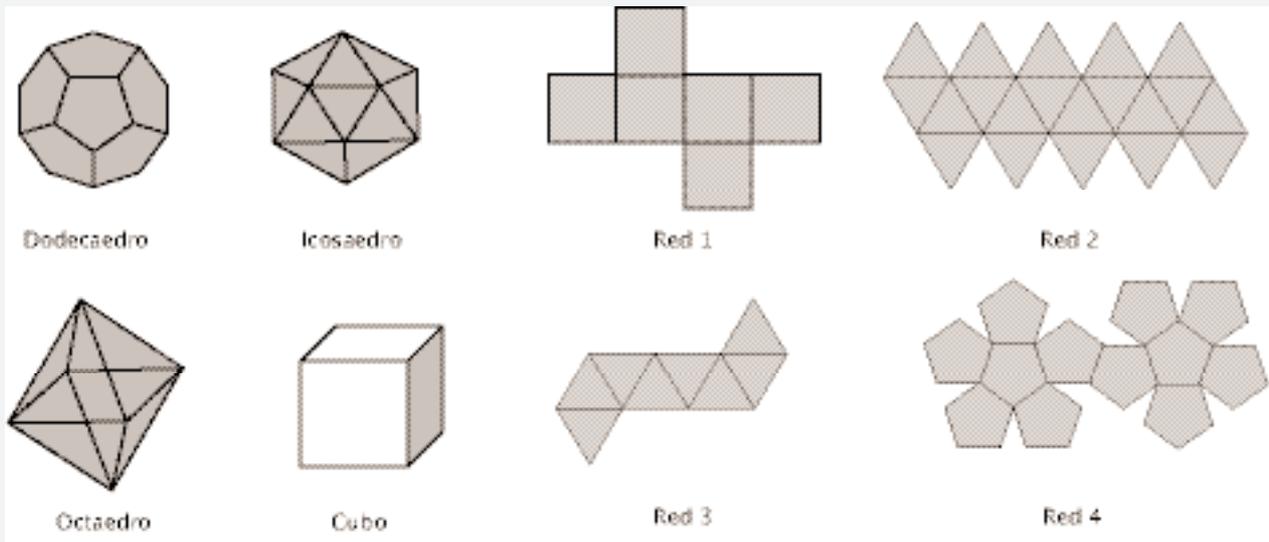
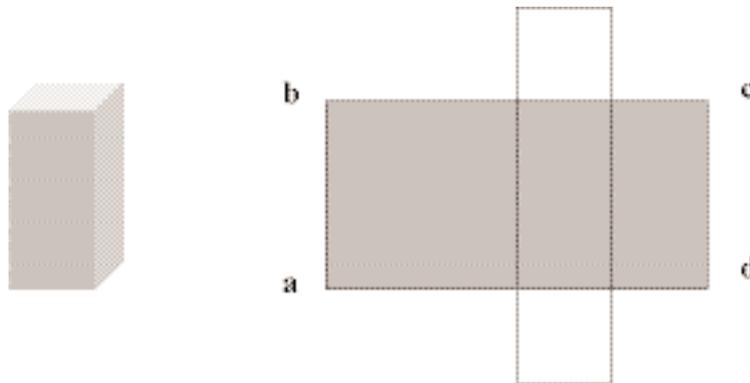


Figura	Red número
Dodecaedro	
Icosaedro	
Octaedro	
Cubo	

Superficie lateral

Observe la siguiente red correspondiente a un prisma:



En él se ha señalado y pintado con color la superficie lateral, que está representada por el rectángulo abcd.

PENSAR



¿Qué haría usted para calcular la superficie sombreada que se corresponde con la superficie lateral del prisma?

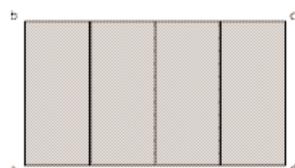
Lo ayudamos en la tarea...

Opción de respuesta 1

Posiblemente calcularía la superficie de un rectángulo (o sea de una cara lateral del prisma) y luego la multiplicaría por 4.

Opción de respuesta 2

Otra opción sería calcular la superficie del rectángulo abcd.



Se utilizaría, en este caso, la fórmula que ya conoce para calcular la superficie de un rectángulo:

Sup. rectángulo abcd: $|b| \cdot |h| \cdot u$

Donde:

$|b|$ es la medida de la base.

$|h|$ es la medida de la altura.

u es la unidad

Opción de respuesta 3

Observe que la medida del lado ab del rectángulo abcd es la medida del perímetro de la base del prisma. Por ello le sugerimos la siguiente expresión para calcular la superficie lateral de este prisma:



Perímetro de la base

Cantidad de superficie lateral del prisma: perímetro de la base por medida de la cantidad de longitud de la altura del prisma por la unidad para medir superficie empleada.

En símbolos: $\text{Perímetro base} \cdot |h| \cdot u^2 \approx$



PENSAR

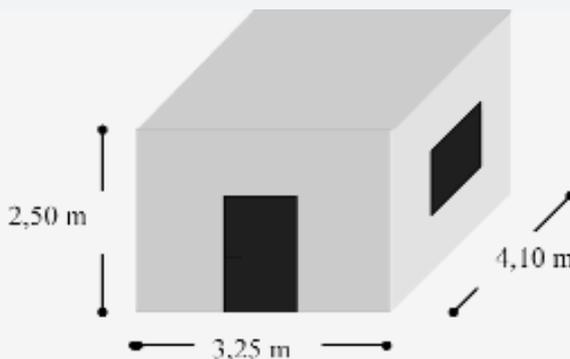
Este procedimiento para calcular la superficie lateral de cualquier cuerpo (poliedro o redondo) por medio de una fórmula se sintetiza en la siguiente tabla:

Cuerpo	Fórmula para calcular la superficie lateral
Cubo	$\text{Perímetro base del cubo} \cdot h \cdot u^2 \approx$
Prisma	$\text{Perímetro base del prisma} \cdot h \cdot u^2 \approx$
Pirámide de base regular	$\frac{\text{Perímetro base de la pirámide} \cdot \text{apotema de la pirámide} \cdot u^2 \approx}{2}$
Cono	$\pi \cdot r \cdot \text{generatriz} \cdot u^2 \approx$
Cilindro	$2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot u^2 \approx$



ACTIVIDADES

1) Un pintor necesita calcular la cantidad de pintura que requiere para pintar las paredes exteriores de una habitación que tiene forma de prisma. En ella hay sólo una puerta y una ventana. Para cumplir la tarea debe calcular la cantidad de superficie que tiene que pintar. Se sabe que la habitación tiene las medidas que muestra el croquis, que la puerta tiene una cantidad de superficie de $1,68 \text{ m}^2$ y la ventana de $1,35 \text{ m}^2$.



2) Calculen la cantidad de superficie lateral de un prisma que tiene una base cuya cantidad de longitud de su contorno es de 12,45 cm. y su altura es de 5,68 cm.

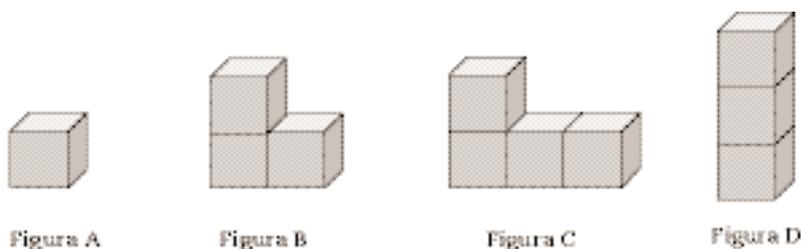
Volumen de cuerpos geométricos

Si observa un cuerpo podrá notar que está limitado por una superficie que separa el interior y el exterior del mismo a la vez que podrá observar que ocupa cierta parte del espacio.

El espacio que ocupa un cuerpo es denominado **volumen**. Cuando se mide el espacio que ocupa un cuerpo se está midiendo la cantidad de volumen del mismo.

Lea atentamente la siguiente situación.

Si consideramos las siguientes figuras tridimensionales (o cuerpos):



¿Qué forma tiene la figura A representada?

Podemos calcular la cantidad de volumen de cada cuerpo (o figura tridimensional) considerando como unidad para medir la cantidad de volumen de la figura A. Así es posible determinar la cantidad de volumen de las figuras B, C y D.

Para ello:

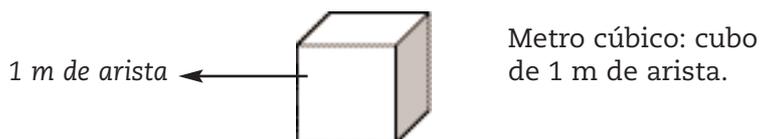
Indique con cuántas unidades (figura A) podría armar una figura equivalente a la figura B. El número que obtuvo es la medida de la cantidad de volumen de la figura B.

Proceda de manera similar con las otras figuras y complete la tabla.

Figura	Medida de la cantidad de volumen
A	1
B	3
C
D

Los problemas que se presentan al medir cantidades de volumen sin usar una unidad convencional son muchos. Por ello, para medir cantidades de volumen, como cualquier otra cantidad de una magnitud, es necesario acordar el uso de una unidad convencional que nos permita a todos medir y, cuando se trate de una misma figura, obtener una misma medida de la cantidad de volumen correspondiente.

El SIMELA (Sistema Métrico Legal Argentino) establece como unidad para medir cantidades de volumen el metro cúbico ($m\Delta$), que se puede materializar en un cubo de 1 m de arista.



Si el volumen de una habitación es de $36 m\Delta$, ¿qué significado tiene para usted esa cantidad de volumen?

Piense en cubos de 1 metro de arista, en metros cúbicos, ¿con cuántos de ellos podría armar un cuerpo que tenga un volumen equivalente al de la habitación indicada?

Seguramente pensó en 36 metros cúbicos.

Decir que el volumen de la habitación es de $36 m\Delta$ significa que son necesarios 36 cubos de un metro de arista (metros cúbicos) para armar un cuerpo que tenga un volumen equivalente al de la habitación.

El metro cúbico posee múltiplos y submúltiplos, que se muestran a continuación:

Múltiplos	Kilómetro cúbico	$km\Delta$	
	Hectómetro cúbico	$hm\Delta$	
	Decámetro cúbico	$dam\Delta$	1000 m^3
Unidad	Metro cúbico	$m\Delta$	1 m^3
Submúltiplos	Decímetro cúbico	$dm\Delta$	0,001 m^3
	Centímetro cúbico	$cm\Delta$	
	Milímetro cúbico	$mm\Delta$	

Nota: no se han considerado todas las equivalencias con el m^3 , ya que se usarán sólo las nombradas.

Piense en 1 $cm\Delta$, ¿qué forma tiene? ¿cómo lo representaría?

Un centímetro cúbico es un cubo de un centímetro de arista. Considerando esto, ¿qué significa que una caja tiene un volumen de 250 cm³?

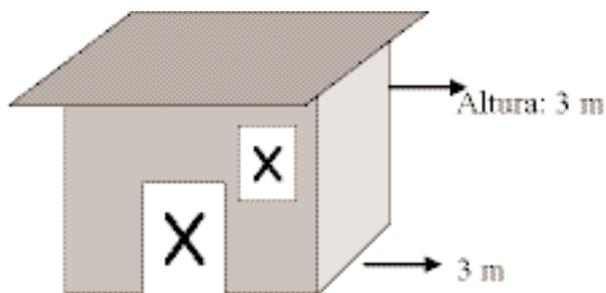
.....

Calculamos cantidades de volumen

Lea atentamente las siguientes situaciones.

Situación 1

Una habitación tiene forma cúbica y las dimensiones que se muestran en la figura:



¿Cuál es la cantidad de volumen de la habitación mostrada?

.....

Para dar respuesta a la pregunta se muestra una posible alternativa de solución. Léala con atención:

- Cantidad de superficie de la base del cubo (piso) que tiene forma de cuadrado:

$$|L| \cdot |L| \cdot m \approx 3 \cdot 3 \cdot m \approx 9 m$$

- Para calcular la cantidad de volumen de un cubo utilizaremos la expresión:

(medida de la superficie de la base del cubo) · (medida de la altura del cubo) · u³

$$9 \cdot 3 \cdot m^3 \approx$$

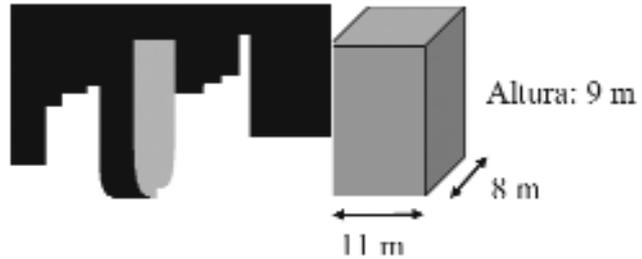
27 m ³

Nota. m³ es la unidad para medir volumen empleada: metro cúbico, centímetro cúbico, etc.

Como habrá notado, para calcular el volumen de un prisma, en el caso del ejemplo un cubo, basta con multiplicar la medida de superficie de la base por la medida de la altura del prisma por la unidad para medir volumen empleada. Así se obtiene la cantidad de volumen buscado.

Situación 2

Un edificio tiene forma de prisma y su base es rectangular. Sus dimensiones se muestran a continuación:



Para calcular su volumen se busca:

- Superficie de la base (piso) que tiene forma de rectángulo:

$$|b| \cdot |h| \cdot m^2 \approx$$

$$\dots \cdot \dots \cdot m^2 \approx$$

$$88 m^2 \approx$$

- Volumen del edificio:

$$(medida de la superficie de la base) \cdot (medida de la altura del prisma) \cdot u^3 \Delta$$

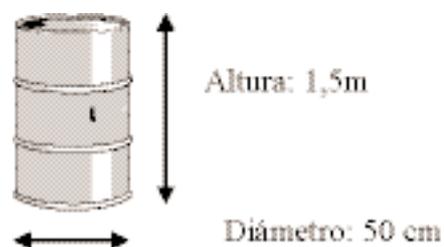
$$= 88 \cdot 9 \cdot m^3 \Delta$$

$$= 792 m^3 \Delta$$

Luego, la cantidad de volumen que ocupa el edificio es de 792 m³.

Situación 3

Un tambor de 200 litros que contiene combustible tiene forma de cilindro. Sus dimensiones se dan a continuación:



Para calcular su volumen recurriremos a la fórmula:

- Cantidad de Superficie de la base (es un círculo):

$$\pi \cdot r^2 \cdot \text{cm}^2 \approx 3,14 \cdot (\dots\dots\dots)^2 \approx \text{cm}^2 \approx =$$

$$3,14 \cdot \dots\dots\dots = 1962,5 \text{ cm}^2 \approx$$

Observe que se tiene como dato el valor del diámetro, pero como en la fórmula se usa el radio se toma la mitad del valor del diámetro, en este caso 25.

- Volumen del tambor con forma de cilindro:

$$(\text{medida de la superficie de la base}) \cdot (\text{medida de la altura del cilindro}) \cdot u^3 \Delta$$

$$1962,5 \quad \cdot \dots\dots\dots \cdot \text{cm}^3$$

Observe que la altura del cilindro es 1,5 m pero el valor de la superficie de la base está dada en cm². Luego, tendrá que expresar la altura en cm. para poder operar con las medidas y que su respuesta sea correcta.

¿Por qué cree que es necesario hacer lo que acabamos de expresar?

Recuerde que medir una cantidad de volumen significa decir cuántas unidades de volumen se necesitan para armar un cuerpo equivalente al dado, es decir que tenga el mismo volumen.

Si la superficie de la base está expresada en cm² significa que el radio de la base del tambor está expresado en cm. y podríamos pensar, por lo tanto, que medir el volumen significa decir a cuántos cm³ es equivalente el volumen del tambor. Pero al encontrarnos con que la altura del tambor está expresada en "metros", también podríamos pensar que debemos decir a cuántos m³ es equivalente el volumen del tambor. Como estamos ante dos posibles respuestas y debemos dar una o la otra, será necesario expresar la cantidad de superficie en m² o bien la altura en cm. De esta forma el volumen quedará expresado en m³ o en cm³.

Para expresar la altura en cm. recuerde que lo puede hacer mediante el siguiente cálculo:

$$1 \text{ m} \rightarrow 100 \text{ cm.}$$

$$1,5 \text{ m} \rightarrow x \text{ cm.}$$

$$\text{luego: } \frac{1}{1,5} = \frac{100}{x}$$

$$x \cdot 1 = 1,5 \cdot 100$$

$$x = 150$$

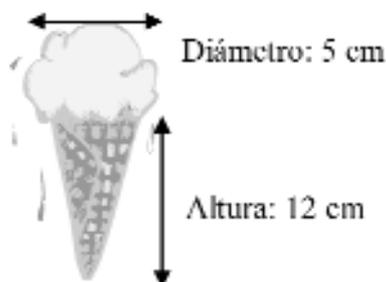
1,5 m equivale a 150 cm.

Luego, la cantidad de volumen del tambor es de 294.375 cm³.

Ahora le solicitamos que exprese la superficie de la base en m² y calcule la medida del volumen del tambor, si la unidad para medir es el m³.

Situación 4

Un recipiente que se utiliza para servir un helado tiene forma de cono. Sus dimensiones se muestran a continuación:



Para calcular su volumen recurriremos a la fórmula:

- Cantidad de superficie de la base (es un círculo):

$$\pi \cdot r^2 \text{ cm}^2 \approx 3,14 \cdot (2,5)^2 \text{ cm}^2 = 3,14 \cdot 6,25 \text{ cm}^2 = 19,625 \text{ cm}^2 \approx$$

Observe que se tenía como dato el valor del diámetro, pero como en la fórmula se usa el radio se toma la mitad del valor del diámetro, en este caso 2,5.

- Cantidad de volumen del cono:

$$\frac{\text{medida_sup base}}{3} \cdot \frac{\text{medida_altura}}{3} \text{ cm}^3 = \frac{19,625}{3} \cdot 12 \text{ cm}^3 = \frac{235,5}{3} \text{ cm}^3 = 78,5 \text{ cm}^3$$

Nota: la medida del volumen del cono es la tercera parte de la medida del volumen de un cilindro de base congruente al cono y de la misma altura. Es por eso que aparece la expresión que permite encontrar la medida del volumen de un cilindro dividida por 3.

Luego, la cantidad de volumen que ocupa el cono (cucurucho de helado) es de 78,5 cm³.

Situación 5

Una caja de propaganda tiene forma piramidal y sus dimensiones son:

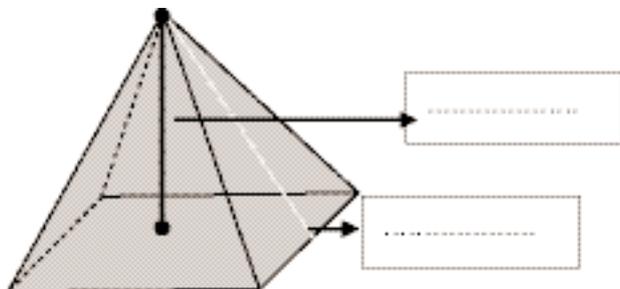
La base es cuadrada y cada lado tiene una longitud de 8 cm.

La altura de la pirámide es de 12 cm.

Si se sabe que la cantidad de volumen de una pirámide es

equivalente a la tercera parte de la cantidad de volumen de un prisma de base congruente a la pirámide y de la misma altura, ¿cómo haría para encontrar la cantidad de volumen de la pirámide?

Ubique la información en la representación gráfica.



CAPACIDAD Y PESO

Lea atentamente las siguientes situaciones y complete según lo indicado en cada caso.

Situación 1

Ubique los productos de la lista en la tabla que se muestra a continuación:

- 1 kg. de arroz.
- 500 gr. de café.
- 1 l de leche.
- 2 l de lavandina.
- 250 gr. de crema.
- 2,5 l de aceite.
- 1000 gr. de polenta.
- 500 gr. de fideos.
- 500 ml de vinagre.
- 1 l de shampoo

Producto	Peso	Capacidad
Arroz	1 kg.

Situación 2

Un envase de gelatina dietética contiene:

- 0,075 gr. de sodio.
- 2 gr. de proteínas.
- 0,625 gr. de aspartamo, entre otros componentes. Su peso neto es de 25 gr.

Situación 3

En tiempo estival es usual escuchar la siguiente recomendación:

- Si quiere mantener el agua del tanque de su casa en óptimas condiciones, coloque 2 gotas de lavandina por cada litro de agua y déjela en reposo durante media hora para poder consumirla".

Teniendo en cuenta las situaciones 2 y 3 le preguntamos:

- ¿Qué magnitudes se han utilizado en estas situaciones?
- ¿Son distintas? ¿Por qué?
- ¿Es lo mismo peso que capacidad?

En la situación 2 se ha trabajado con cantidades de peso, mientras que en la situación 3 se ha trabajado con cantidades de capacidad.

Para medir cantidades de esas dos magnitudes -peso y capacidad- se utilizan distintas unidades. ¿Las recuerda? Observe las siguientes tablas:

Unidades para medir cantidades de capacidad

Múltiplos	Kilolitro	kl	1.000 l
	Hectolitro	hl	100 l
	Decalitro	dal	10 l
Unidad	Litro	l	1 l
Submúltiplos	Decilitro	dl	0,1 l
	Centilitro	cl	0,01 l
	Mililitro	ml	0,001 l

Unidades para medir cantidades de peso

Múltiplos	<i>Tonelada</i>	<i>t</i>	1.000 kg.
	<i>Quintal</i>	<i>q</i>	100 kg.
Unidad	<i>Kilogramo</i>	<i>kg.</i>	1 kg.
Submúltiplos	<i>Gramo</i>	<i>gr.</i>	0,001 kg.
	<i>Decigramo</i>	<i>dg.</i>	0,0001 kg.
	<i>Centigramo</i>	<i>cg.</i>	0,00001 kg.
	<i>Miligramo</i>	<i>mg.</i>	0,000001 kg.

Con el agua es un caso especial...

Lea atentamente la siguiente situación.

Se presenta un nuevo envase de agua mineral y la información que se tiene es la siguiente:



*Contenido neto: 1 litro.
 Peso: 1 kilogramo.
 Volumen: 1000 cm³.*

Le preguntamos:

¿Cómo es posible hablar del mismo producto y expresarse acerca de él de tantas formas distintas?

.....

Esto es así porque existe una equivalencia que hace posible comparar 3 aspectos distintos de un mismo objeto. Así, es posible comparar capacidad (que se refiere a lo que puede contener el envase) con peso y al mismo tiempo con el volumen (que se refiere al espacio que ocupa el contenido del objeto).

Hablamos del agua como un caso especial porque ...

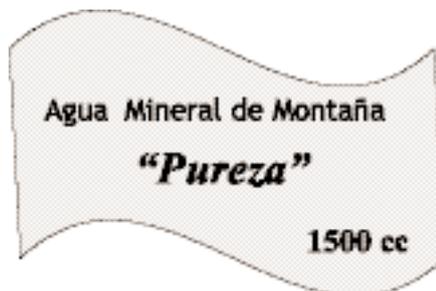
"En un laboratorio se puede comprobar experimentalmente que 1 litro de agua a 4° C de temperatura pesa 1 kg. y ocupa un volumen de 1000 cm³".

Es por esta razón que podemos decir que en un litro de agua se produce la siguiente equivalencia:

<i>Capacidad</i>	<i>Peso</i>	<i>Volumen</i>
1 l	1 kg	1000 cm ³

Situación 1

La etiqueta de una botella de agua mineral es la siguiente:



Se pregunta:

- ¿Cuál es su capacidad en litros?

.....

- ¿Cuál es su peso?

.....

• Para dar respuesta a la primer pregunta planteamos lo siguiente:

$$\begin{array}{l} 1000 \text{ cm}^3 \longrightarrow 1 \text{ l} \\ 1500 \text{ cm}^3 \longrightarrow x \end{array}$$

Resolvemos esta proporcionalidad directa:

$$\frac{1000}{1500} = \frac{1}{x}$$

$$1000 \cdot x = 1500$$

$$x = 1,5$$

Luego, su capacidad es de 1,5 litros.

- Para solucionar la segunda pregunta tenemos:

$$\begin{array}{l} 1000 \text{ cm}^3 \longrightarrow 1 \text{ kg} \\ 1500 \text{ cm}^3 \longrightarrow x^3 \end{array}$$

Resolvemos igual que en el caso anterior:

$$\frac{1000}{1500} = \frac{1}{x}$$

$$1000 \cdot x = 1500$$

$$x = \frac{1500}{1000}$$

$$x = 1,5$$

La capacidad de la botella (1,5 litros) pesa 1,5 kg. (un kilo y medio).

Situación 2

Complete la tabla con los valores que corresponda:

Capacidad	Peso	Volumen
1 l	
	500 g.	
		2000 cm ³
3/4 l		
	2,5 kg.	

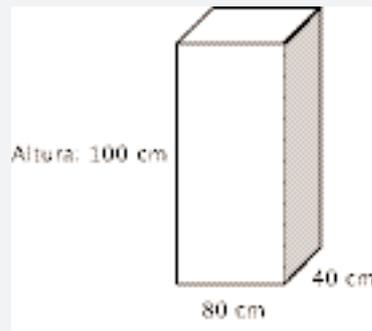


ACTIVIDADES

1. ¿Cuántos litros de agua, aproximadamente, se necesitan para llenar un recipiente que tiene un volumen de 15.000 cm³?

2. Un camión que transporta combustible tiene una capacidad de 32.000 litros. ¿Qué volumen ocupa dicho contenido?

3. Se quiere colocar un pedestal para que sirva de base de una estatua. La forma del pedestal es la siguiente:



En este trabajo intervienen dos personas:

- a) Un jardinero debe rodear el pedestal con flores. Para ello necesita conocer el perímetro de la base del pedestal.
- b) Un arquitecto desea saber cuál es el volumen que ocupa el pedestal para saber si guarda proporción con el lugar en donde será colocado.
- c) Un marmolero debe recubrir con granito, toda la superficie lateral del pedestal, para lo cual necesita saber cuántos metros cuadrados de granito hacen falta.

¿Podrían encontrar la información que necesitan las tres personas para realizar su trabajo?

Anexo bibliográfico

Bibliografía sugerida para el alumno

LAROTONDA, JULIA Y OTROS (2000), Matemática 9. E.G.B., Colombia, Ed. Kapelusz.

GARAVENTA LUIS Y OTROS (2000), Carpeta de matemática 9º, Bs. As., Ed. Aique.

Bibliografía sugerida para docentes

ALDERETE, JUDITH Y OTROS (1993), Matemática para la Educación Básica. Serie Roja: El mundo de los números y la aritmética. Libro del maestro, Ed. MEB.

ALDERETE, JUDITH Y OTROS (1996), Matemática para la Educación Básica. Serie Verde. El Mundo de las Probabilidades y las Estadísticas, Mendoza, Publicaciones Pedagógicas.

AMADORI, LILIANA (1994), Matemática 2, Bs. As., Ed. Aique.

ARAGÓN, MARIANA Y OTROS (2004), Matemática 9 E.G.B., Bs. As., Ed. Estrada.

CANTEROS, LAURA INÉS Y OTROS (1997), Libro de la matemática, Ed. Estrada. Falta lugar

CHORNY, FERNANDO Y OTROS (2003), Pitágoras. Matemática 9º, Bs. As., Ed. S.M.

JIMÉNEZ, J. CÓLERA Y GUZMÁN, M. DE, Matemáticas 1, Ozamis. Barcelona, Ed. ANAYA.. 9519., falta año y descifrar qué es este número.

LAURITO, LILIANA Y OTROS (2002), Matemática 9. E.G.B., Bs. As., Ed. Puerto de Palos.

LÓPEZ ALICIA Y OTROS (2000), Matemática en Red. Serie de tramas. Tercer Ciclo, Ed. A-Z. falta lugar

PACHECO, NORMA Y OTROS (2003), Resolución de problemas, Mendoza, EDIUNC.

SANTALÓ, LUIS A. (1993), Matemática I. Iniciación a la creatividad, Colombia, Ed. Kapelusz..